



CARMEN CARANO

**SUL PRINCIPIO DI HANKEL
NELL'INSIEME
DEI NUMERI COMPLESSI
E ALTRI ARTICOLI**



aracne



aracne



ISBN
979-12-5994-214-2

PRIMA EDIZIONE
ROMA 22 OTTOBRE 2021

L'uomo, un po' alla volta, individua le leggi che governano
le singole cose dell'universo, ma la sua distanza
dalla comprensione del tutto rimane sempre la stessa

INDICE

- 9 **Capitolo I**
Sul principio di Hankel nell'insieme dei numeri complessi
Introduzione, 9 – 1. Numeri complessi con lo stesso modulo e argomenti che differiscono per multipli interi di un angolo giro e radici n-esime di un numero complesso, 11 – 2. Nuova definizione di numero complesso, elemento neutro rispetto al prodotto, 13 – 3. Le radici quadrate delle potenze dell'unità reale, di un generico numero complesso e, in particolare, delle potenze dell'opposto dell'unità reale, 17 – 4. Conclusioni, 19.
- 23 **Capitolo II**
Una spirale logaritmica aurea
Introduzione, 24 – 1. La spirale di Archimede, 24 – 2. La spirale logaritmica, 26 – 3. Descrizione per punti di una spirale logaritmica, 29 – 4. Un esempio di spirale aurea, 30 – Bibliografia, 34.
- 35 **Capitolo III**
La successione di Fibonacci, il numero aureo, la spirale logaritmica aurea
1. Definizione di successione logaritmica di punti, 36 – 2. La successione $\{\varphi^i\}$, 38 – 3. Generalizzazione della successione di Fibonacci e relazione tra questa e la $\{\varphi^i\}$, 38 – 4. Costruzione di una successione logaritmica di punti, 39 – Bibliografia, 41.

43 **Capitolo IV**

Spirali logaritmiche tridimensionali

1. Introduzione alle spirali logaritmiche tridimensionali, 44 – 2. Proprietà delle spirali logaritmiche nello spazio, 44 – 3. Definizione di superficie spirale logaritmica cilindrica, 45 – 4. Le (curve) spirali logaritmiche tridimensionali, 47 – 4.1 *Successioni di punti che individuano spirali del primo tipo*, 47 – 4.2 *Successioni di punti che individuano spirali del secondo tipo*, 52 – Bibliografia, 56.

57 **Capitolo V**

Sulle serie armoniche generalizzate

1. Cenni sulla serie di Fourier, 57 – 2. Sviluppo in serie di Fourier dei prolungamenti periodici delle funzioni $y = x^s$ (con s numero intero positivo pari) [...], 59 – 3. Sviluppo in serie di Fourier dei prolungamenti periodici delle funzioni $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$, $y = x^8$ [...], 59 – 4. Formula ricorsiva per il calcolo della somma della generica serie armonica generalizzata [...] con s numero intero positivo pari, 64 – Bibliografia, 66.

67 **Capitolo VI**

Sulle serie alternate

1. Introduzione, 67 – 2. Sviluppo in serie di Fourier dei prolungamenti periodici delle funzioni $y = x^s$ (con s numero naturale dispari) [...], 69 – 3. Sviluppo in serie di Fourier dei prolungamenti periodici delle funzioni $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ [...], 69 – 4. Formula ricorsiva per il calcolo della somma della generica serie alternata [...] con s numero naturale dispari, 73 – Bibliografia, 74.

CAPITOLO I

SUL PRINCIPIO DI HANKEL NELL'INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI

Sunto: In questo lavoro, nell'introduzione, si evidenzia l'apparente non validità, nell'insieme C dei numeri complessi, di alcune proprietà delle potenze verificate nell'insieme R dei numeri reali, cosa che sembrerebbe contraddire il principio di permanenza delle proprietà formali di Hankel.

Allo scopo di individuare i motivi di ciò, viene analizzata la questione della polidromia dell'operazione di estrazione di radice n -esima e in particolare di radice quadrata in C e viene ridefinito il concetto stesso di numero complesso (e quindi quello di uguaglianza di numeri complessi; partendo dalla rappresentazione polare di un qualunque numero complesso, viene anche data una interpretazione geometrica dell'elemento neutro rispetto al prodotto e in generale, in un qualunque insieme numerico, rispetto ad una qualunque operazione).

Si giunge quindi alla conclusione che, con questa nuova definizione degli elementi dell'insieme C , l'operazione di estrazione di radice n -esima di un qualunque numero complesso ha un unico risultato, la formula di De Moivre risulta valida anche nel calcolo di potenze a esponente razionale non intero e le proprietà delle potenze che sembravano non essere più verificate nel passaggio da R a C contraddicendo così il principio di Hankel, sussistono anche in quest'ultimo insieme.

Introduzione

Nell'insieme I dei numeri immaginari, e quindi anche nell'insieme C dei numeri complessi, sembrerebbe non essere valido il principio di permanenza delle proprietà formali di Hankel rispetto ad alcune proprietà delle potenze.

Infatti:

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

ma, supponendo valido in C il principio di Hankel rispetto alle proprietà delle potenze, dovrebbe essere anche:

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = \pm 1^1$$

(mentre sappiamo che i è una delle radici quadrate di -1 , ma non di 1).

Analogamente, è:

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

ma, supponendo valido in C il principio di Hankel rispetto alle proprietà delle potenze, dovrebbe essere anche:

$$i^3 = (\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})(\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = \sqrt{(-1)^3} = \sqrt{-1} = \pm i^1.$$

(Ovviamente, queste incongruenze si verificherebbero anche per i quadrati delle altre unità immaginarie, negli insiemi ipercomplessi).

Da quanto visto, scaturisce che non è verificata la proprietà delle potenze che, applicata per esempio all'espressione che segue, dovrebbe rendere vere le uguaglianze:

$$\left((3i)^{\frac{1}{2}} \right)^4 = \left((3i)^4 \right)^{\frac{1}{2}} = (3i)^{4 \cdot \frac{1}{2}}.$$

Infatti risulta:

$$\left((3i)^4\right)^{\frac{1}{2}} = \pm 9^1 \quad \text{e} \quad \left(\left(3i\right)^{\frac{1}{2}}\right)^4 = (3i)^{\frac{1}{2} \cdot 4} = -9.$$

1. Numeri complessi con lo stesso modulo e argomenti che differiscono per multipli interi di un angolo giro e radici n -esime di un numero complesso

I numeri complessi $z = (\rho; \alpha + 2k\pi) \neq 0$, con $0 \leq \alpha < 2\pi$, al variare di k nell'insieme Z , sono uguali (per il numero 0, per il quale il modulo ρ è nullo, l'argomento è indeterminato, risultando $0 = (0; \beta)$ per qualunque angolo β).

Per ogni valore di $k \in Z$, il vettore $(\rho; \alpha + 2k\pi)$ è rappresentato dal segmento orientato di primo estremo l'origine, di lunghezza ρ , che forma un angolo orientato di ampiezza α col semiasse positivo delle ascisse (che rappresenta il primo lato dell'angolo).

In realtà, tale vettore, però, per $k = 0$ è $(\rho; \alpha)$, per $k = 1$ è $(\rho; \alpha + 2\pi)$ che è ancora lo stesso ma, prima di raggiungere la posizione finale sovrapponendosi a $(\rho; \alpha)$, ha effettuato una rotazione di un angolo giro in senso antiorario, per $k = 2$ è $(\rho; \alpha + 4\pi)$ che è ancora lo stesso ma, prima di raggiungere la posizione finale sovrapponendosi a $(\rho; \alpha)$, ha effettuato una ulteriore rotazione di un angolo giro in senso antiorario; in generale, man mano che k aumenta di 1, tale vettore ruota in senso antiorario di un angolo giro; analogamente, man mano che k diminuisce di 1, tale vettore ruota in senso orario di un angolo giro.

Quindi il vettore che rappresenta il numero $z = (\rho; \alpha + 2k\pi)$ si sovrappone a quello che rappresenta $z = (\rho; \alpha)$ dopo aver compiuto una rotazione di k angoli giro (in senso antiorario per $k > 0$, in senso orario per $k < 0$).

¹ Le n radici n -esime diverse tra loro di un numero complesso $z = \rho(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ sono:

$$\sqrt[n]{z}_{1,2,\dots,n} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) \quad \text{per } k = 0, 1, 2, \dots, (n-1).$$

L'aver identificato i numeri $(\rho; \alpha + 2k\pi)$, prescindendo dalle rotazioni compiute dal vettore che li rappresenta prima di raggiungere la (stessa) posizione finale, non comporta problemi quando si opera con tali numeri utilizzando le quattro operazioni fondamentali e quindi anche le potenze con esponente intero (i risultati delle operazioni sono gli stessi comunque si scelga k in Z e quindi in corrispondenza di tutti gli infiniti relativi argomenti); quando però si devono calcolare le radici e quindi le potenze con esponente razionale non intero, o i logaritmi, cioè per le operazioni che vengono considerate polidrome, bisogna distinguere $(\rho; \alpha + 2k\pi)$ e $(\rho; \alpha + 2h\pi)$, con $k, h \in Z$ e $k \neq h$, perché i risultati di tali operazioni non sono tutti uguali: considerato un generico numero complesso $(\rho; \alpha + 2k\pi)$, quando si calcolano le sue radici n -esime, si ottengono n numeri complessi diversi tra loro che si ripetono ciclicamente e, quando si calcola il logaritmo si ottengono infiniti valori diversi.

E' proprio l'aver identificato i numeri $(\rho; \alpha + 2k\pi)$ al variare di k la causa della questione della polidromia dell'operazione di potenza con esponente razionale non intero (così come di quella di logaritmo), nell'insieme dei numeri complessi; come già visto in un precedente lavoro, se si distinguono i numeri corrispondenti a ogni valore fissato di $k \in Z$, tali operazioni non risultano polidrome (la questione della polidromia si presenta ogni volta che si considerano operazioni che sono funzioni inverse di funzioni non invertibili nell'intero loro dominio; per ognuno degli infiniti valori interi di k , di fatto si restringe il dominio della funzione di partenza a un insieme in cui essa risulta invertibile)².

(Anche operando nell'insieme R dei numeri reali, ci imbattiamo nella questione della polidromia quando consideriamo il calcolo delle radici con indice pari di numeri positivi; in base alla definizione di radice n -esima di un numero, esse sono date infatti da due numeri reali opposti. Ciò è dovuto al fatto che tali operazioni sono le inverse delle funzioni $y = x^{2n}$ per le quali, affinché risultino invertibili, bisognerà restringere il dominio

² *Logaritmi e potenze nell'insieme dei numeri complessi*, Aracne, 2018.

R a uno dei due intervalli $D_1 =]-\infty; 0[$ e in tal caso si otterrà la radice < 0 , o $D_2 = [0; +\infty[$ e in tal caso si otterrà la radice ≥ 0).

Se non li identificassimo, infatti, otterremmo, per ogni valore di k , una sola radice; ciò equivarrebbe a calcolare singolarmente le radici n -esime che si hanno dalla nota formula:

$$\sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right)$$

(ugualmente otterremmo, per ogni valore di k , un unico valore del logaritmo).

Evidentemente, non identificare, al variare di k in Z , i numeri complessi $(\rho; \alpha + 2k\pi)$ comporterebbe la validità della formula di De Moivre anche nel calcolo di potenze con esponente razionale non intero.

2. Nuova definizione di numero complesso, elemento neutro rispetto al prodotto

Dalla formula di De Moivre, la potenza h -esima (con $h \in Z$) di un numero complesso $z = (\rho; \alpha)$ con $0 \leq \alpha < 2\pi$ è il numero $z^h = (\rho^h; h\alpha)$ (l'angolo α è detto generalmente argomento principale di z); quando h aumenta di 1, l'argomento della potenza aumenta di α , quindi il vettore che rappresenta z^{h+1} , che ha modulo $\rho^{h+1} = \rho^h \cdot \rho$, è ruotato rispetto a quello che rappresenta z^h di un angolo α (come detto in precedenza, comunque, il risultato della potenza sarebbe lo stesso anche se si considerasse $z = (\rho; \alpha + 2k\pi)$ con k qualunque appartenente a Z , dato che $(\rho^h; h(\alpha + 2k\pi))$ e $(\rho^h; h\alpha)$ hanno lo stesso modulo e argomenti che differiscono, per ogni h e k fissati, per un multiplo intero di 2π).

Nel caso in cui $z \in R^+$, avendo considerato $0 \leq \alpha < 2\pi$, sarà $\alpha = 0$; quindi, l'argomento di z^h , differentemente da quanto accade per numeri complessi che non siano reali positivi, al variare di h , non cambia ed è sempre uguale a 0.

D'ora in avanti, tratteremo come diversi due numeri complessi aventi lo stesso modulo e argomenti che differiscono per multipli interi di 2π (e quindi, come vedremo in seguito, anche le potenze dell'unità reale con esponenti interi diversi tra loro), pur essendo, ovviamente, per la periodicità delle funzioni circolari, vera l'uguaglianza:

$$\rho(\cos(\alpha + 2h\pi) + isen(\alpha + 2h\pi)) = \rho(\cos(\alpha + 2k\pi) + isen(\alpha + 2k\pi)) \quad \forall h, k \in Z.$$

Questo significa che dovremo identificare un numero complesso mediante il valore $\rho(\cos(\alpha + 2k\pi) + isen(\alpha + 2k\pi))$ che, come già detto, è lo stesso $\forall k \in Z$ e il numero k di angoli giro (positivi o negativi, cioè rispettivamente in verso antiorario o orario) contenuti nel suo argomento, quindi le rotazioni complete che il vettore rappresentativo dello stesso compie prima di raggiungere la posizione finale (quindi un vettore nel piano non sarà rappresentato solo dagli infiniti segmenti orientati equipollenti che si possono considerare scegliendo nel piano un qualunque punto di applicazione, ma per ogni punto di applicazione scelto, che nel caso dei vettori che rappresentano i numeri complessi è l'origine del piano di Gauss, anche dalle infinite possibili rotazioni complete del vettore prima di raggiungere la stessa posizione finale).

Daremo, pertanto, una nuova definizione di uguaglianza nell'insieme C dei numeri complessi: definiremo uguali numeri complessi aventi moduli e argomenti uguali.

Come già detto, nelle quattro operazioni fondamentali e quindi nelle potenze con esponente intero, trattare indifferentemente numeri complessi con lo stesso modulo e argomenti che differiscono per multipli interi di 2π non comporta problemi, quindi in tali operazioni potremo utilizzare indifferentemente uno qualunque degli argomenti $\alpha + 2k\pi$ ottenendo sempre gli stessi risultati; invece, nel calcolo di potenze con esponente

razionale non intero, trattare indifferentemente tali numeri determina le incongruenze che abbiamo evidenziato nell'introduzione.

Indicheremo, per ogni $k \in Z$, con z_k il numero complesso $(\rho; \alpha + 2k\pi)$; quindi sarà $z_0 = (\rho; \alpha)$ (con $k = 0$ e $0 < \alpha \leq 2\pi$ argomento principale di $z = (\rho; \alpha + 2k\pi)$), $z_1 = (\rho; \alpha + 2\pi)$ (con $k = 1$), $z_{-1} = (\rho; \alpha - 2\pi)$ (con $k = -1$), $z_2 = (\rho; \alpha + 4\pi)$ (con $k = 2$), $z_{-2} = (\rho; \alpha - 4\pi)$ (con $k = -2$),; ogni volta che il risultato di un'espressione in cui compare z_k sia lo stesso per ogni $k \in Z$, potremo riscrivere tale espressione sostituendo z_k con z , che rappresenterà gli infiniti z_k , al variare di k in Z .

Pertanto, anche per la generica potenza con esponente h intero, avremo, al variare di k , $z_k^h = (\rho^h; (\alpha + 2k\pi) \cdot h)$.

Nell'insieme $C - \{0\}$, i numeri z_k , al variare di k in Z , cioè quello che abbiamo indicato complessivamente con z , rappresentano una classe di equivalenza rispetto alla relazione *Rel* così definita nell'insieme complesso: $w \text{Rel} v$ (con $w, v \in C$) $\Leftrightarrow \rho_w = \rho_v$ e $\arg(w) - \arg(v) = 2k\pi$ con $k \in Z$ (si verifica facilmente, infatti, che tale relazione gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva).

Dalla definizione data di numero complesso in base alla quale numeri con lo stesso modulo e argomenti che differiscono per multipli interi di 2π sono considerati diversi (anche se equivalenti rispetto alla relazione *Rel*), implica che non avremo più una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri complessi e i punti di un piano (e, analogamente, tra l'insieme dei numeri reali e i punti di una retta) perché in corrispondenza di ogni punto del piano, secondo estremo del vettore che rappresenta il numero, avremo infiniti numeri complessi, per i quali il vettore ha compiuto, prima di raggiungere la (stessa) posizione finale, k rotazioni complete, al variare di k in Z .

L'unità reale in C è, al variare di k in Z , l'insieme degli infiniti numeri complessi $1_k = (1; 0 + 2k\pi) = (1; 2k\pi)$. Essendo $1_1 = (1; 2\pi)$, sarà quindi, $1_k = 1_1^k$.

Aver ridefinito il concetto di uguaglianza nell'insieme C , in base al quale due numeri risultano uguali se e solo se hanno lo stesso modulo e lo stesso argomento, comporta che l'elemento neutro rispetto al prodotto sarà il numero $1_0 = (1; 2 \cdot 0 \cdot \pi) = (1; 0)$; la potenza 1_k^0 è $1_k^0 = (1; 0 \cdot 2k\pi) = (1; 0)$ e, dato che l'uguaglianza $1_k^0 = (1; 0)$ è vera $\forall k \in Z$ e che 1 rappresenta l'insieme degli infiniti 1_k , possiamo riscriverla come $1^0 = 1_0$. Quindi l'elemento neutro rispetto al prodotto coincide con la potenza dell'unità reale con esponente zero.

Il vettore che rappresenta, $\forall z \in C$, il numero $z \cdot 1_0 = z \cdot 1^0$ coincide con quello che rappresenta z (a cui si sovrappone senza aver subito, rispetto ad esso, alcuna trasformazione; il vettore che rappresenta $z \cdot 1_k$, con $k \neq 0$, invece, si sovrappone a quello che rappresenta z dopo aver compiuto, rispetto ad esso, k rotazioni complete in senso antiorario o orario rispettivamente per k positivo o negativo).

In generale, utilizzando la rappresentazione polare, diremo che due numeri di un qualunque insieme numerico T sono uguali se hanno lo stesso modulo e lo stesso argomento; quindi potremo dare una definizione geometrica dell'elemento neutro rispetto a una qualsiasi operazione \perp definita in tale insieme.

Definiamo in T elemento neutro rispetto a una operazione \perp , il numero $u \in T$ (tale che $\forall t \in T, u \perp t = t \perp u = t$) per il quale il vettore che rappresenta $u \perp t = t \perp u$ si ottiene da quello che rappresenta t mediante trasformazione identica (cioè di fatto che si ottiene da quello che rappresenta t senza che questo subisca alcuna trasformazione); la composizione mediante \perp dei vettori che rappresentano u e un qualunque numero t dell'insieme T quindi non produce sul vettore che rappresenta t nessuna trasformazione, neanche trasformazioni diverse dall'identità che però riportano tale vettore nella sua posizione iniziale.

3. Le radici quadrate delle potenze dell'unità reale, di un generico numero complesso e, in particolare, delle potenze dell'opposto dell'unità reale

Quanto visto nei due paragrafi precedenti, permette di eliminare le incongruenze evidenziate nell'introduzione.

Come abbiamo visto, l'unità reale 1 è rappresentata, al variare di k in Z , dagli infiniti numeri complessi $1_k = (1; 2k\pi)$. Essendo quindi $1_1 = (1; 2\pi)$, sarà $1_k = 1_1^k = (1; k \cdot 2\pi)$ e pertanto, al variare di k , le potenze $1_1^k = 1_k^1$ coincidono con l'unità reale 1, data dagli 1_k al variare di k in Z .

Da ciò si ha che le radici quadrate dell'unità reale coincidono con le radici quadrate delle potenze 1_1^k :

.....

$$\begin{aligned} \sqrt{1_{-2}} = \sqrt{1_1^{-2}} &= \cos\left(-\frac{4\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{4\pi}{2}\right) = 1; & \sqrt{1_{-1}} = \sqrt{1_1^{-1}} &= \cos\left(-\frac{2\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{2}\right) = -1; \\ \sqrt{1_0} = \sqrt{1_1^0} &= \cos\left(\frac{0}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{0}{2}\right) = 1; & \sqrt{1_1} = \sqrt{1_1^1} &= \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{2}\right) = -1; \\ \sqrt{1_2} = \sqrt{1_1^2} &= \cos\left(\frac{4\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{2}\right) = 1; & \sqrt{1_3} = \sqrt{1_1^3} &= \cos\left(\frac{6\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{2}\right) = -1; \end{aligned}$$

.....

In generale sarà:

$$\sqrt{1_k} = \sqrt{1_1^k} = (\sqrt{1_1})^k = (-1)_0^k \quad \forall k \in Z \quad (1)$$

il che è coerente col fatto che i numeri 1_k (come in generale i numeri z_k) al variare di k non possono essere identificati, essendo: $\sqrt{1_k} \neq \sqrt{1_{k+1}}$, dato che $\sqrt{1_k} = -\sqrt{1_{k+1}}$ (come in generale $\sqrt{z_k} = -\sqrt{z_{k+1}}$).

Ovviamente, $1_0^h = 1_0$ per ogni $h \in Z$, coerentemente col fatto che 1_0 è l'elemento neutro rispetto al prodotto e che $1_0^h = (1^0)^h = 1^{0h} = 1^0$.

Da quanto visto, possiamo calcolare la radice quadrata di un qualunque numero complesso. Infatti, per ogni numero complesso z , con $z_0 = \rho(\cos \alpha + isen \alpha) \neq 0$ (quindi con $0 < \alpha \leq 2\pi$), $\forall k \in Z$, sar\`a:

$$z_k = \rho(\cos(\alpha + 2k\pi) + isen(\alpha + 2k\pi)) = \rho(\cos \alpha + isen \alpha)(\cos 2k\pi + isen 2k\pi) = z_0 \cdot 1_k = z_0 \cdot 1_1^k$$

e quindi:

$$z_k = z_0 \cdot 1_k = z_0 \cdot 1_1^k \quad (2)$$

da cui:

$$\sqrt{z_k} = \sqrt{z_0 \cdot 1_k} = \sqrt{z_0 \cdot 1_1^k} = \sqrt{z_0} \cdot \sqrt{1_1^k} = \sqrt{z_0} \cdot (-1)_0^k \quad (3)$$

e quindi, al variare di k in Z , si alterneranno valori opposti della radice quadrata di z_k (ovviamente sar\`a $\sqrt{0} = 0$).

Utilizzando la (2) con $z = -1$, si ha:

$$(-1)_k = (1; \pi + 2k\pi) = (-1)_0 \cdot 1_k = (-1)_0 \cdot 1_1^k$$

e quindi:

$$\sqrt{(-1)_k} = \sqrt{(-1)_0 \cdot 1_1^k} = \sqrt{(-1)_0} \cdot (\sqrt{1_1})^k = i_0 \cdot (-1)_0^k \quad (4).$$

Dalla (4), per $k = 0$, si ha:

$$\sqrt{((-1)_0)^h} = (\sqrt{(-1)_0})^h = i_0^h = \cos\left(\frac{h\pi}{2} + isen\frac{h\pi}{2}\right) \quad \forall h \in Z$$

che, per $h = 0, 1, 2, 3$ assume i valori $1_0, i_0, (-1)_0, (-i)_0$; per $h = 4, 5, 6, 7$ (che equivale ad aver aggiunto 1 angolo giro agli argomenti corrispondenti

rispettivamente a $h=0,1,2,3$) assume i valori $1_1, i_1, (-1)_1, (-i)_1$; per $h=8,9,10,11$ (che equivale ad aver aggiunto 2 angoli giro agli argomenti corrispondenti rispettivamente a $h=0,1,2,3$) assume i valori $1_2, i_2, (-1)_2, (-i)_2$; così come, per $h=-4,-3,-2,-1$ (che equivale ad aver sottratto 1 angolo giro agli argomenti corrispondenti rispettivamente a $h=0,1,2,3$) assume i valori $1_{-1}, i_{-1}, (-1)_{-1}, (-i)_{-1}$ e così via.....

(Per qualunque numero complesso non nullo z , risulta come in R , $z^0 = 1_0 = 1^0$, cioè la potenza con esponente 0 è uguale all'elemento neutro rispetto al prodotto:

$$(z_k)^0 = \rho_z^0 (\cos(0(\pi + 2k\pi)) + isen(0(\pi + 2k\pi))) = (\cos 0 + isen 0) = 1_0 = 1^0$$

per ogni valore di k).

Dalle (1) e (4), si ottiene:

$$\sqrt{(-1)_0} = \sqrt{\sqrt{1_1}} = \sqrt[4]{1_1} = i_0$$

coerentemente col fatto che i è una delle radici quarte di 1.

La (3) risolve anche la questione della polidromia in R dell'operazione di radice quadrata e, di conseguenza, tenendo presente la proprietà delle potenze $(m^{p \cdot q}) = (m^p)^q = (m^q)^p$ (valida per ogni $p, q \in Q$) e le (1) e (3), anche di radice n -esima (con n pari qualsiasi) di un generico numero m reale positivo.

4. Conclusioni

Ritornando alle incongruenze evidenziate nell'introduzione, da quanto visto nel paragrafo precedente, per ogni k intero, si ha:

$$i_k^2 = (\sqrt{(-1)_{2k}})^2 = (-1)_{2k} = ((-1)_0)^{4k+1}$$

e, applicando le proprietà delle potenze, ugualmente:

$$i_k^2 = (\sqrt{(-1)_{2k}})^2 = (\sqrt{(-1)_{2k}})(\sqrt{(-1)_{2k}}) = \sqrt{(-1)_{2k}(-1)_{2k}} = \sqrt{1_{4k+1}} = (-1)_{2k} = ((-1)_0)^{4k+1};$$

dato che per ogni valore di k l'esponente $4k+1$ è dispari, risulta quindi:

$$i^2 = -1.$$

Analogamente, per ogni k intero, risulta:

$$i_k^3 = i_k^2 \cdot i_k = ((-1)_0)^{4k+1} \cdot i_k$$

e, applicando le proprietà delle potenze, ugualmente:

$$i_k^3 = \sqrt{(-1)_{2k}} \cdot \sqrt{(-1)_{2k}} \cdot \sqrt{(-1)_{2k}} = \sqrt{(-1)_{6k+1}} = i_k \cdot ((-1)_0)^{4k+1}$$

e quindi, sempre perché per ogni valore di k l'esponente $4k+1$ è dispari, si ha:

$$i^3 = -i$$

coerentemente con il principio di permanenza delle proprietà formali di Hankel.

(Ovviamente, ciò risulta valido anche per le altre unità immaginarie negli insiemi dei numeri ipercomplessi).

Da quanto visto, anche nell'esempio considerato nell'introduzione, risulta ancora valido il principio di Hankel; infatti, per ogni k intero, si ha:

$$\left((3i)^4\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(3i)_k^4} = \sqrt{\left(3; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^4} = \sqrt{(81; 2\pi + 8k\pi)} = (9; \pi + 4k\pi) = (-9)_{2k} = -9$$

e

$$\left((3i)^{\frac{1}{2}} \right)^4 = (\sqrt{(3i)_k})^4 = \left(\sqrt{3}; \frac{\pi}{4} + k\pi \right)^4 = (9; \pi + 4k\pi) = (-9)_{2k} = -9$$

da cui

$$\left((3i)^{\frac{1}{2}} \right)^4 = (3i)^{\frac{1}{2} \cdot 4} = -9.$$

CAPITOLO II

UNA SPIRALE LOGARITMICA AUREA

Sunto: In questo lavoro si dimostra una semplice proprietà dei triangoli rettangoli e con essa si costruisce un esempio di spirale logaritmica aurea. La proprietà e l'esempio sono inseriti in un breve excursus storico sulle *spirali archimedee e logaritmiche*.

Abstract: In this job we prove an easy property of right-angled triangles and by it we construct an example of golden logarithmic spiral. The property and the example are introduced in a brief historical digression on the archimedean and logarithmic spirals.

Parole chiave: Coordinate polari, progressioni aritmetiche e geometriche, sezione aurea.

Introduzione

La spirale è una curva piana che si avvolge in infiniti giri intorno a un punto e la cui curvatura diminuisce man mano che ci si allontana da esso.

È una delle figure geometriche più diffusa in natura: si trova per esempio nel modo in cui crescono i petali e le foglie di alcuni fiori, nella forma delle corna, delle zanne e degli artigli di alcuni animali, nel moto dei cicloni, nella molecola del DNA, nella forma di alcune conchiglie come quella del Nautilus e in quella di alcune galassie.

Dal punto di vista matematico, la spirale si definisce come una curva piana la cui equazione polare è della forma $\rho = f(\theta)$ dove f è una funzione monotona in un intervallo non limitato (il polo è il punto intorno al quale la curva si avvolge).

In particolare analizzeremo un esempio di spirale logaritmica aurea, ma prima ci sembra opportuno parlare brevemente della spirale di Archimede e della spirale logaritmica.

1. La spirale di Archimede

Tale curva, scoperta circa 2200 anni fa dallo scienziato siracusano e da lui descritta nell'opera *De lineis spiralibus*¹, ha equazione polare $\rho = k\theta$, cioè per un punto di tale curva la distanza dal polo è proporzionale all'angolo descritto dal raggio vettore.

Si tratta della traiettoria di un punto mobile su una semiretta: mentre la semiretta ruota intorno alla sua origine O con velocità angolare costante, il punto, partendo da O , si muove di moto uniforme (fig. 1).

¹ Nell'opera sono sviluppati argomenti geometrici e cinematica, che spesso si fondono tra loro. Sembra che Archimede sia stato il primo ad aver trovato, con considerazioni cinematiche simili al calcolo differenziale, la tangente ad una curva diversa dalla circonferenza. Nell'opera Archimede tratta anche il moto uniforme e riguardo ad esso dimostra due proposizioni: *gli spazi percorsi da un punto che si muove di moto uniforme stanno fra loro come i tempi di percorrenza; gli spazi percorsi in tempi uguali da due punti che si muovono di moto uniforme sono fra loro proporzionali.*

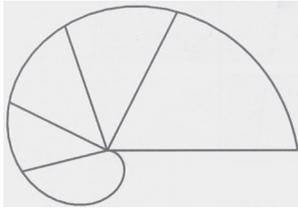


fig. 1

Servendosi della spirale, Archimede ottenne risultati molto interessanti.

Uno di questi consiste nella possibilità di ridurre il problema della rettificazione di una circonferenza a quello di tracciare la tangente alla spirale in un suo punto.

Infatti, supposto che la semiretta ruotante abbia compiuto un giro completo, il punto mobile su di essa, inizialmente in O , coinciderà con un determinato punto della spirale. Si tracci la tangente alla spirale in questo punto e per il punto O si tracci la perpendicolare alla semiretta nella nuova posizione. La tangente e la perpendicolare s'incontreranno in un punto. Il segmento di perpendicolare determinato da O e questo punto è la circonferenza rettificata del *primo cerchio*, cioè del cerchio che ha come raggio il segmento compreso fra O e il punto di tangenza (fig. 2).



fig. 2

Un'importante proprietà di questo tipo di curva consiste nel poter effettuare con essa la trisezione di un angolo assegnato.

Un altro risultato stabilito da Archimede è che la superficie compresa tra la prima rivoluzione della spirale e la semiretta ruotante è la terza parte del *primo cerchio*.

2. La spirale logaritmica

Fu scoperta nel 1638 da Cartesio (1596-1690) e successivamente trattata da Evangelista Torricelli (1608–1647) nella sua opera *De infinitis spiralibus*² che risale al 1645. Circa cinquant'anni dopo la

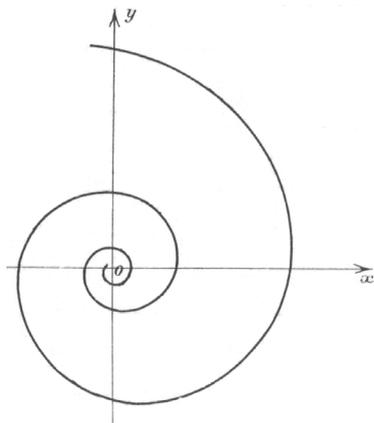


fig. 3

scoperta di tale curva, Jacob Bernoulli (1654-1705), studiandone le proprietà, ne rimase talmente affascinato da chiedere che sulla sua tomba ne fosse scolpita una con la scritta *eadem mutata resurgo*³. Lo scalpello riuscì a riprodurre, invece, solo una spirale di Archimede e sulla tomba la scritta non compare.

La *spirale logaritmica* o *equiangolare* (fig. 3) ha equazione polare $\rho = a e^{k\theta}$, dove a e k sono numeri reali positivi, θ

è un qualsiasi numero reale e risulta $\lim_{\theta \rightarrow -\infty} \rho = 0$ (il polo è quindi per tale curva un punto asintotico; se cercassimo di osservarlo con una lente d'ingrandimento via via più potente, vedremmo riprodotta identica sempre la stessa curva).

Il nome di *spirale logaritmica* deriva dal fatto che la sua equazione può essere scritta nella forma

$$\ln \rho = k \theta + \text{cost.}$$

Il nome *spirale equiangolare*, con il quale a volte viene chiamata tale curva, dipende dal fatto che una sua proprietà caratteristica è che un qualsiasi raggio vettore, negli infiniti punti in cui incontra la spirale, forma con le tangenti in tali punti angoli della stessa

² È una delle opere più significative di Torricelli, in cui viene risolto, per la prima volta nella storia della matematica, il problema della *rettificazione* di un arco di curva.

³ “*sebbene mutata, rinasco identica*”.

ampiezza. Indicata con ψ l'ampiezza di tali angoli, risulta $k = \cot g \psi$. Infatti, considerato un generico punto $P[\rho, \theta]$ della curva di equazione $\rho = a e^{k\theta}$, siano r il raggio vettore passante per P e t la tangente alla curva in tale punto (fig. 4).

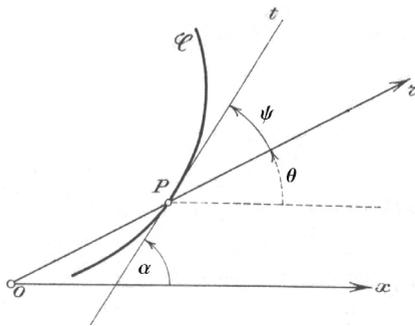


fig. 4

Le coordinate cartesiane di P sono $(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$ quindi il coefficiente angolare di t è

$$\operatorname{tag} \alpha = \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = \frac{\operatorname{tag}\theta + \frac{\rho}{\rho'_\theta}}{1 - \frac{\rho}{\rho'_\theta} \operatorname{tag}\theta}$$

da cui si ricava $\operatorname{tag} \alpha = \frac{\operatorname{tag}\theta + \frac{\rho}{\rho'_\theta}}{1 - \frac{\rho}{\rho'_\theta} \operatorname{tag}\theta}$, che può

essere scritta nella forma $\frac{\operatorname{tag}\alpha - \operatorname{tag}\theta}{1 + \operatorname{tag}\alpha \cdot \operatorname{tag}\theta} = \frac{\rho}{\rho'_\theta}$. Essendo $\psi = \alpha - \theta$, si ha $\operatorname{tag} \psi = \frac{\rho}{\rho'_\theta}$, da cui $\cot g \psi = \frac{\rho'_\theta}{\rho} = \frac{a k e^{k\theta}}{a e^{k\theta}} = k$.

Questa proprietà è caratteristica per la spirale logaritmica; infatti, da $\frac{\rho'_\theta}{\rho} = k$ segue $\frac{d\rho}{\rho} = k d\theta$. Integrando ambo i membri di quest'ultima uguaglianza, si ha $\int_a^\rho \frac{d\rho}{\rho} = \int_0^\theta k d\theta$ da cui si ottiene $\ln \frac{\rho}{a} = k \theta$ e, quindi, $\rho = a e^{k\theta}$.

Nell'opera *De infinitis spiralibus* Torricelli dà una definizione di spirale logaritmica (che l'autore chiama *spirale geometrica*) che si

dimostra essere equivalente a quella da noi precedentemente riportata⁴ e che risulta molto interessante per l'esempio che vogliamo trattare.

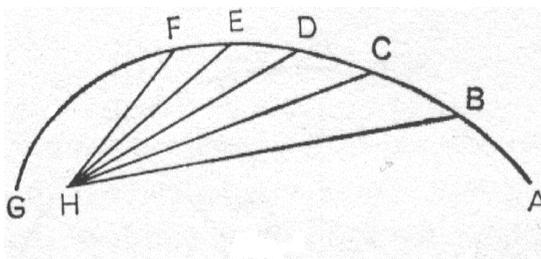
Consideriamo una certa linea [v. figura] ABCDEFG, tale che, se con vertice in H si prendono quanti si vogliono angoli consecutivi tra loro uguali, per esempio:

$$\widehat{BHC} = \widehat{CHD} = \widehat{DHE} = \dots$$

tali angoli siano limitati da segmenti in proporzione continua, si abbia cioè:

$$HB : HC = HC : HD = HD : HE = \dots$$

Tale linea sarà da noi chiamata "spirale geometrica" della quale diremo H il centro e i segmenti HB, HC, HD, HE, ... i raggi.



Chiamiamo geometrica la spirale ora definita per esprimere con il nome stesso quale sia la differenza tra le spirali d'Archimede, che veramente possono dirsi aritmetiche, e le nostre.

Le spirali archimedee infatti hanno questo di particolare, che il punto mobile sopra una retta, animata da moto rotatorio [uniforme] su di un piano, in tempi uguali percorre spazi uguali. Invece nelle nostre spirali il punto che si muove sopra la retta animata da moto rotatorio uniforme possiede la proprietà caratteristica di percorrere in tempi uguali spazi in progressione geometrica. La proposizione enunciata si dimostra con facile ragionamento in base alla definizione posta: infatti [v. figura], dato che velocità della retta ruotante nel piano è sempre uguale a se stessa, e gli angoli \widehat{BHC} , \widehat{CHD} , \widehat{DHE} sono uguali tra loro, è manifesto che la nostra linea rotante, per esempio HB, descrive in tempi uguali uno qualsiasi dei predetti angoli uguali. Ma, poiché i segmenti stessi che limitano quegli angoli uguali sono in proporzione continua, anche le loro differenze saranno in proporzione continua: ma le differenze

⁴ Cfr. [1], pagg. 188-190, nota 13.

non sono altro che gli spazi percorsi dal punto mobile che si muove sopra la retta rotante nel piano. E' dunque chiaro che il punto mobile il quale presso Archimede percorre spazi uguali in tempi uguali, nelle nostre spirali non percorre spazi uguali ma spazi in progressione geometrica; quindi piacque chiamare geometriche queste spirali.

Per poter ottenere questa curva, non si può partire dal polo (come per la spirale di Archimede) essendo questo per tale curva un punto asintotico. È possibile immaginare la sua generazione partendo da un suo generico punto, per esempio da $P_0(\rho_0, \theta_0)$ con $\theta_0 = 0$.

Immaginiamo due semirette, di origine nel polo O e inizialmente nella posizione OP_0 , che cominciano a ruotare in verso opposto con la stessa velocità angolare costante, mentre su ognuna di esse, partendo da P_0 , un punto si sposta su una semiretta avvicinandosi e sull'altra allontanandosi dal polo, con la stessa velocità, percorrendo in tempi uguali spazi in progressione geometrica.

3. Descrizione per punti di una spirale logaritmica

Dimostreremo qui di seguito come ogni successione di punti di un piano i cui moduli sono in progressione geometrica di ragione q e i cui argomenti sono in progressione aritmetica di ragione p , appartiene alla

spirale logaritmica definita da $k = \frac{\ln q}{p}$.

Assegnati i numeri reali a , q , p , con a e q positivi e $q \neq 1$, consideriamo le due successioni $\{\rho_i\}$, $\{\theta_i\}$ di numeri reali così definite:

$$\begin{cases} \rho_0 = a \\ \rho_i = \rho_{i-1} q \end{cases} ; \begin{cases} \theta_0 = 0 \\ \theta_i = \theta_{i-1} + p \end{cases}$$

La successione di punti $\{P_i(\rho_i, \theta_i)\}$ appartiene alla spirale logaritmica di equazione polare $\rho = a e^{\frac{\ln q}{p} \theta}$.

Per la dimostrazione, applicheremo il principio d'induzione separatamente alle due successioni di primo elemento $P_0(a, 0)$ (che evidentemente appartiene alla spirale), la prima con elementi con indici interi crescenti, la seconda con indici interi decrescenti.

- Prima successione: basta far vedere che, se P_{i-1} appartiene alla spirale, anche P_i vi appartiene:

$$\rho_i = \rho_{i-1} \cdot q = a \cdot e^{\frac{\ln q}{p} g_{i-1}} \cdot q = a \cdot q^{\frac{g_{i-1}+1}{p}} = a \cdot q^{\frac{g_{i-1}+p}{p}} = a \cdot q^{\frac{g_i}{p}} = a \cdot e^{\frac{\ln q}{p} g_i} \quad c. v. d.$$

- Seconda successione: basta far vedere che, se P_i appartiene alla spirale, anche P_{i-1} vi appartiene:

$$\rho_{i-1} = \rho_i \cdot q = \frac{a \cdot e^{\frac{\ln q}{p} g_i}}{q} = a \cdot q^{\frac{g_i-1}{p}} = a \cdot q^{\frac{g_i-p}{p}} = a \cdot q^{\frac{g_{i-1}}{p}} = a \cdot e^{\frac{\ln q}{p} g_{i-1}} \quad c. v. d.$$

4. Un esempio di spirale aurea

Ritornando alla definizione di Torricelli, diremo *aurea* ogni spirale logaritmica in cui il rapporto costante tra raggi consecutivi è pari al

$$\text{numero aureo } \varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

In questo articolo chiamiamo successioni elenchi ordinati di elementi con indici in \mathbb{Z} : non si tratta di successioni (secondo la definizione classica di successione), ma di elenchi ordinati di elementi che possiamo pensare come unione di due successioni aventi lo stesso primo elemento, una con elementi con indici crescenti ($a_0, a_1, a_2, a_3 \dots$), l'altra con elementi con indici decrescenti ($a_0, a_{-1}, a_{-2}, a_{-3} \dots$); tali elenchi rappresentano modelli matematici che ben si prestano allo studio delle spirali logaritmiche.

Teniamo anche presente che la *sezione aurea* di un segmento si *autogenera*⁵.

Il seguente teorema permette di individuare una successione di punti appartenenti ad una spirale logaritmica aurea.

TEOREMA: *Se in un triangolo rettangolo un cateto è la sezione aurea dell'ipotenusa, tale cateto proietta sull'ipotenusa la sua sezione aurea.*

Dimostrazione: Consideriamo il triangolo rettangolo OAB (fig. 5) con $\hat{B} = \frac{\pi}{2}$ e OB uguale alla parte aurea di OA.

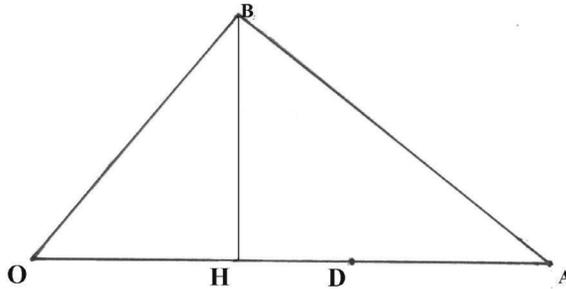


fig. 5

Costruito su OA il segmento OD uguale a OB, per ipotesi si ha:

$$\overline{OA} \cdot \overline{DA} = \overline{OB}^2$$

ma, per il primo teorema di Euclide, risulta anche

$$\overline{OA} \cdot \overline{OH} = \overline{OB}^2$$

quindi $\overline{DA} = \overline{OH}$. Essendo DA la sezione aurea di OD e quindi di OB⁵, l'asserto è dimostrato.

⁵ Se b è la parte aurea di a , allora $a-b$ (parte rimanente) è la parte aurea di b . Infatti:

$$a : b = b : (a-b) \Leftrightarrow (a-b) : b = (2b-a) : (a-b) \Leftrightarrow b : (a-b) = (a-b) : (b-(a-b)).$$

Questo teorema permette di costruire con riga e compasso la successione di punti $\{P_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, per i quali risulta:

$$\frac{\overline{OP_{i+1}}}{\overline{OP_i}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi ;$$

$$P_i \hat{O} P_{i+1} = \text{arc sec} \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) = \arccos \varphi^{-1} \approx 51^\circ 49' 38'' .$$

Si tratta pertanto di una successione di punti di un piano i cui moduli sono in progressione geometrica di ragione φ e i cui argomenti sono in progressione aritmetica di ragione $\arccos \varphi^{-1}$. Per quanto dimostrato precedentemente, essi appartengono quindi alla spirale logaritmica di equazione polare

$$\rho = \overline{OP_0} e^{\frac{\ln \varphi}{\arccos \varphi^{-1}} \theta} .$$

Posto $\overline{OP_0} = 1$, la formula precedente può essere scritta nella forma

$$\rho = \varphi^{\frac{\theta}{\arccos \varphi^{-1}}}$$

e, per ogni punto P_i , risulta:

$$\rho(P_i) = \varphi^i \quad \text{e} \quad \theta(P_i) = i \arccos \varphi^{-1} .$$

Di seguito riportiamo la costruzione con riga e compasso di alcuni dei punti P_i (fig. 6). Nella figura il segmento OQ è la sezione aurea di OP_3 .

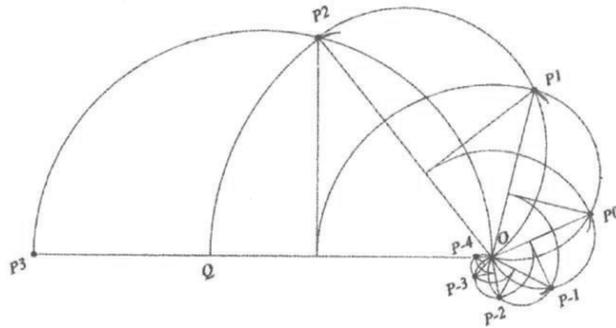


fig. 6

Il grafico della spirale aurea considerata è quello di fig. 7.

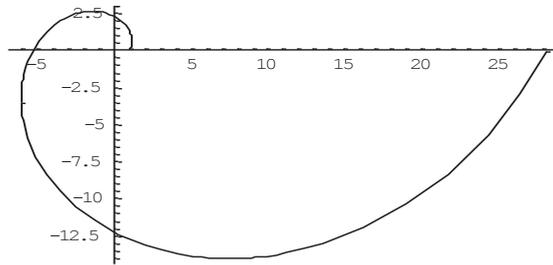


fig. 7

L'incremento della distanza da O quando si passa da P_i a P_{i+1} è, per ogni $i \in \mathbb{Z}$, $\Delta d_i = \overline{OP_{i+1}} - \overline{OP_i} = \overline{OP_i}(\varphi - 1) = \overline{OP_i}\varphi^{-1}$ (in particolare è $\Delta d_1 = \overline{OP_0}$); gli elementi della successione $\{\Delta d_i\}$ di tali incrementi sono pertanto in progressione geometrica di ragione $\Delta d_{i+1} / \Delta d_i = \varphi$.

Se pensiamo alla generazione della spirale considerata immaginando, come descritto alla fine del paragrafo 2, due semirette, di origine nel polo O e inizialmente nella posizione OP_0 , che cominciano a ruotare...., le due successioni $\{\Delta d_i\}_{i \geq 0}$ e $\{\Delta d_i\}_{i < 0}$ degli spazi percorsi dal punto mobile su ognuna delle due semirette quando esse ruotano, in senso opposto, intorno alla loro origine di un angolo di ampiezza $\alpha = \text{arcsec } \varphi = \arccos \varphi^{-1}$, sono progressioni geometriche di ragione rispettivamente $\Delta d_{i+1} / \Delta d_i = \varphi$ e $\Delta d_{i-1} / \Delta d_i = \varphi^{-1}$.

Bibliografia

- [1] G. CASTELNUOVO, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, Feltrinelli, Milano, 1962.
- [2] G. LORIA, *Storia delle Matematiche*, Hoepli, Milano, 1950.
- [3] C. B. BOYER, *Storia della matematica*, Mondatori, Milano, 1990.
- [4] U. MORIN, *Lezioni di Geometria*, v. II, Cedam, Padova, 1966.

CAPITOLO III

LA SUCCESSIONE DI FIBONACCI, IL NUMERO AUREO, LA SPIRALE LOGARITMICA AUREA

Sunto: In questo lavoro si definisce una successione logaritmica (e in particolare aurea) di punti nel piano, si introduce una generalizzazione della successione di Fibonacci e si vede come questa è in relazione con la successione $\{\varphi^i\}$, dove φ è il numero aureo e i varia in \mathbb{Z} ; infine si dimostra come si può costruire una successione logaritmica di punti, e quindi una spirale logaritmica che, in un caso particolare, risulta aurea.

Abstract: In this job we define a logarithmic succession (and in particular a golden succession) of points in the plane, then we introduce a generalization of Fibonacci's succession and we indicate how it is connected with the succession $\{\varphi^i\}$, where φ is the golden number and i is a number of \mathbb{Z} ; at last we show how it is possible to make a logarithmic succession of points and, from here, a logarithmic spiral that, in a particular case, is a golden spiral.

Parole chiave: Coordinate polari, progressioni aritmetiche e geometriche, sezione aurea, spirale logaritmica, spirale aurea.

1. Definizione di successione logaritmica di punti

In un riferimento polare i punti di una successione $\{P_i\}$, con anomalie in progressione aritmetica e con moduli in progressione geometrica, appartengono ad una spirale logaritmica. In base a tale proprietà, definiremo logaritmica una successione di punti $\{P_i\}$ per i quali in un riferimento polare di polo O si verificano le seguenti uguaglianze:

$$P_i \hat{O} P_{i+1} = \alpha \quad \frac{\overline{OP_{i+1}}}{\overline{OP_i}} = \lambda \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

(i moduli di tali punti costituiscono quindi una successione del tipo $\{c\lambda^i\}$). I punti P_i individuano una spirale logaritmica di equazione polare:

$$\rho = ke^{\frac{\ln \lambda}{\alpha} \theta}$$

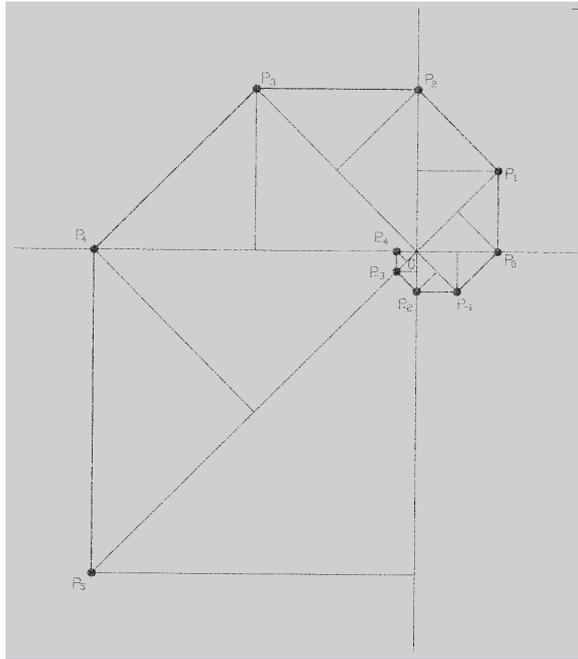
e quindi:

$$\rho = k\lambda^{\frac{\theta}{\alpha}}$$

Per esempio, se si considera una serie di quadrati aventi un vertice in O e tali che la diagonale di ognuno di essi avente un estremo in O sia il lato del quadrato successivo (spostandosi in senso orario o antiorario), come nel grafico che segue, la successione degli estremi di tali diagonali, diversi da O, è una successione logaritmica di punti per i quali

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \quad \lambda = \sqrt{2}$$

In questo, come già in un precedente articolo, chiamiamo ancora successioni elenchi ordinati di elementi con indici non in \mathbb{N} ma in \mathbb{Z} (che ben si prestano allo studio delle spirali logaritmiche); si tratta di elenchi ordinati che si possono pensare come unioni di due successioni con lo stesso primo elemento: una con indici crescenti $(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$ e una con indici decrescenti $(a_0, a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \dots)$.



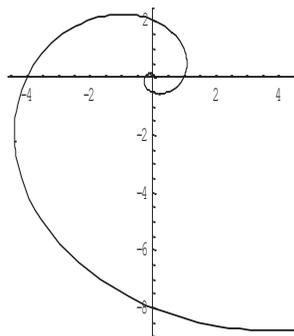
che individuano la spirale logaritmica di equazione

$$\rho = k(\sqrt{2})^{\frac{49}{\pi}}$$

e quindi

$$\rho = k \cdot 2^{\frac{2}{\pi}}$$

Di seguito riportiamo il grafico di tale spirale nel caso che sia $k = 1$ ($\rho(P_0)=1$).



In particolare, se $\lambda = \varphi$ (dove φ è il rapporto tra un segmento e la sua parte aurea), definiremo la successione $\{P_i\}$ una successione logaritmica aurea (i moduli di tali punti costituiscono una successione del tipo $\{c\varphi^i\}$). In tal caso la spirale individuata dai punti P_i è una spirale aurea che dipende dai valori di k e di α , di equazione:

$$\rho = k\varphi^{\frac{9}{\alpha}}.$$

2. La successione $\{\varphi^i\}$

Il rapporto tra un segmento e la sua parte aurea è pari al numero aureo

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

quindi φ^{i-1} è la lunghezza della parte aurea del segmento di lunghezza φ^i per ogni valore di i appartenente a Z . Se il segmento AB ha lunghezza φ^i , la sua parte aurea AC ha lunghezza φ^{i-1} e la parte rimanente CB (che è la parte aurea di AC) ha lunghezza φ^{i-2} . Sarà quindi, per ogni i appartenente a Z ,

$$\varphi^i = \varphi^{i-1} + \varphi^{i-2} \quad (1)$$

$$(\varphi^{i-1})^2 = \varphi^i \varphi^{i-2} \quad (2).$$

3. Generalizzazione della successione di Fibonacci e relazione tra questa e la $\{\varphi^i\}$

La successione di Fibonacci $\{f_n\}$ (con $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ per $n > 1$) può essere generalizzata in Z in $\{f_i\}$ (con $f_0 = 0, f_1 = 1, f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$ per ogni i appartenente a Z). Sarà quindi:

$$\{f_i\} = \{\dots -21, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \dots\}.$$

Per tale successione risulta:

$$f_i = f_{i-1} + f_{i-2} \quad (3)$$

e

$$(f_{i-1})^2 = f_i f_{i-2} \begin{cases} +1 & \text{se } i \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } i \text{ è dispari} \end{cases} \quad (4).$$

Queste due relazioni che caratterizzano tale successione differiscono da quelle che caratterizzano la successione $\{\varphi^i\}$ a causa del termine $+1$ o -1 nella seconda; tale termine tende a diventare sempre più ininfluente al crescere di i (cioè, al crescere di i , f_{i-1} si avvicina sempre più alla parte aurea di f_i).

Binet ha dimostrato, per ogni n appartenente a \mathbb{N} , la seguente relazione tra la $\{f_n\}$ e la $\{\varphi^n\}$:

$$f_n = \frac{\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Tale relazione continua a essere valida anche tra le successioni $\{f_i\}$ e $\{\varphi^i\}$, per ogni i appartenente a \mathbb{Z} :

$$f_i = \frac{\varphi^i - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^i}{\sqrt{5}} \quad (5).$$

E' facile, partendo dalla (1), determinare la relazione inversa:

$$\varphi^i = f_i \varphi + f_{i-1} \quad (6)$$

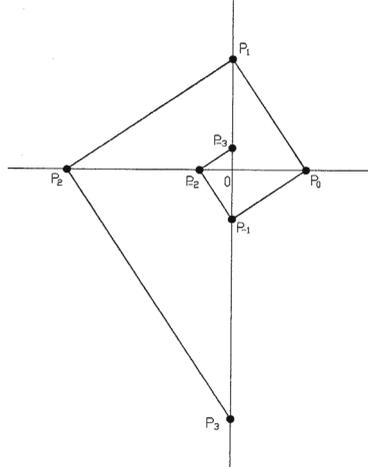
valida, anch'essa, per ogni i appartenente a \mathbb{Z} .

4. Costruzione di una successione logaritmica di punti

E' possibile ottenere molto facilmente una successione logaritmica di punti nel piano nel seguente modo.

A partire da un punto P_0 qualsiasi sul semiasse positivo delle ascisse (per esempio $P_0(1, 0)$), si tracci un segmento (che non giaccia sull'asse x e che non sia ad esso perpendicolare) il cui secondo

estremo P_1 sia sul semiasse positivo dell'asse y e con ordinata diversa da 1. A partire dal segmento P_0P_1 si costruiscano, per i appartenente a \mathbb{Z} , i segmenti P_iP_{i+1} perpendicolari tra loro e con gli estremi alternativamente sull'asse delle ascisse e su quello delle ordinate.



La $\{P_i\}$ è una successione logaritmica di punti per la quale

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \lambda = \frac{\overline{OP_1}}{\overline{OP_0}}.$$

Infatti, per il secondo teorema di Euclide, è

$$\overline{OP_i}^2 = \overline{OP_{i-1}} \cdot \overline{OP_{i+1}}$$

e sarà quindi:

$$\overline{OP_{i+1}} = \frac{\overline{OP_i}}{\overline{OP_{i-1}}} \cdot \overline{OP_i}.$$

Essendo i triangoli OP_iP_{i+1} simili, risulterà

$$\frac{\overline{OP_i}}{\overline{OP_{i-1}}} = \lambda$$

con λ costante. Quindi la $\{P_i\}$ individua una spirale logaritmica di equazione polare

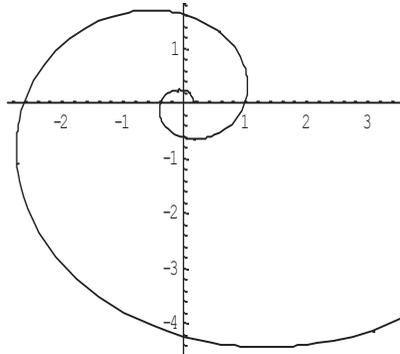
$$\rho = \lambda^{\frac{2}{9}\pi}$$

(se $\lambda = 2$, tale spirale coincide con quella dell'esempio del primo paragrafo).

Se $\lambda = \varphi$ si ottiene una successione aurea di punti che individua la spirale aurea di equazione polare:

$$\rho = \varphi^{\frac{2}{9}\pi}$$

(in tal caso $\rho(P_i) = \rho(P_{i-1}) + \rho(P_{i-2}) = \varphi^i$ dove φ^i può essere calcolato, per ogni valore di i , dalla (6)).



Bibliografia

- [1] G. LORIA, *Storia delle Matematiche*, Hoepli, Milano, 1962.
- [2] L. CAMPEDELLI, *Lezioni di geometria*, Cedam, Padova, 1966.
- [3] E. TORRICELLI, *De infinitis spiralibus* (trad. E. Carruccio), "Quaderni di Storia e critica della Scienza", n° 3, 1955.

CAPITOLO IV

SPIRALI LOGARITMICHE TRIDIMENSIONALI

Sunto: In questo lavoro si definiscono due tipi di curve nello spazio (spirali logaritmiche tridimensionali), ottenuti dall'intersezione di due coppie di superfici di cui si forniscono le equazioni in coordinate cilindriche. Si dimostra poi che una successione $\{P_i\}$ di punti dello spazio aventi coordinate cilindriche che soddisfano opportune condizioni, individua una spirale logaritmica del primo o del secondo tipo.

Abstract: In this work two different types of curves in space are defined (three-dimensional logarithmic spirals). They are obtained by intersections of two pairs of surfaces whose equations in cylindrical coordinates are provided. Then we demonstrate that a succession $\{P_i\}$ of points of the space having cylindrical coordinates that satisfy appropriate conditions, characterizes a logarithmic spiral of first or second type.

Parole chiave: Coordinate cilindriche, superfici spirali logaritmiche cilindriche, progressioni aritmetiche e geometriche, numero aureo, curve spirali logaritmiche, curve spirali logaritmiche auree.

1. Introduzione alle spirali logaritmiche tridimensionali

Passando dalla situazione bidimensionale a quella tridimensionale, il polo, punto intorno al quale la spirale logaritmica piana si avvolge in infiniti giri (avvicinandosi indefinitamente ad esso da una parte e allontanandosi sempre più da esso dall'altra con curvatura via via decrescente), diventa l'asse polare, retta intorno alla quale la curva si avvolge ancora in infiniti giri (continuando ad avvicinarsi indefinitamente ad esso da una parte e allontanandosi sempre più da esso dall'altra con curvatura via via decrescente).

Nello spazio, a differenza di quanto avviene nel piano, credo che si possano distinguere due tipi di spirali logaritmiche: la proiezione ortogonale di esse su un generico piano perpendicolare all'asse è una spirale logaritmica piana; la differenza tra i due tipi di spirale consiste nel fatto che nel primo caso esse si avvicinano indefinitamente da una parte all'asse tendendo a un suo punto proprio, nel secondo si avvicinano indefinitamente ad esso da una parte tendendo a uno dei suoi due punti impropri.

2. Proprietà delle spirali logaritmiche nello spazio

Per la spirale logaritmica piana, detto O il suo polo e considerati su di essa i punti A, B, C, D, E, F, \dots tali che $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOF} = \dots$, risulta $OA:OB=OB:OC=OC:OD=OD:OE=OE:OF=\dots$; questa è una proprietà che caratterizza (e quindi definisce) le spirali logaritmiche piane, quindi è vero anche che se si considerano dei punti A, B, C, D, E, F, \dots che verificano le condizioni precedenti (cioè per i quali i moduli sono in progressione geometrica di ragione che indicheremo con q e gli argomenti in progressione aritmetica di ragione che indicheremo con p), si può affermare che essi appartengono a una

In questo, come già in precedenti articoli sulle spirali logaritmiche, chiamiamo ancora successioni elenchi ordinati di elementi con indici non in \mathbb{N} ma in \mathbb{Z} ; si tratta di elenchi ordinati che si possono pensare come unioni di due successioni con lo stesso primo elemento: una con indici crescenti ($a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$) e una con indici decrescenti ($a_0, a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \dots$).

spirale logaritmica piana e si dimostra che tale spirale ha equazione $\rho = ae^{k\vartheta}$ con $k=\ln q/p$ (E. TORRICELLI, *De infinitis spiralibus*).

Per la spirale logaritmica tridimensionale, considerati su di essa i punti A, B, C, D, E, F.....tali che i diedri delimitati dai semipiani uscenti dall'asse polare e contenenti rispettivamente il punto A e il punto B, il punto B e il punto C, il punto C e il punto D, il punto D e il punto E, il punto E e il punto F.....siano di ampiezza uguale, le distanze dei punti considerati dall'asse polare dovranno costituire una catena di rapporti uguali, cioè tali distanze dovranno essere in progressione geometrica; in tal caso, però, se viceversa i punti A, B, C, D, E, F.....verificano tale proprietà, per affermare che essi appartengono a una spirale logaritmica tridimensionale, si dovranno verificare altre condizioni che vedremo in seguito e che dipendono dal tipo di spirale.

3. Definizione di superficie spirale logaritmica cilindrica

Nella trattazione che segue si farà uso, nella rappresentazione di punti nello spazio, oltre che delle coordinate cartesiane, delle coordinate cilindriche. Se il punto P ha, nel riferimento cartesiano Oxyz, coordinate (x, y, z) , la terna ordinata (ρ, ϑ, z) rappresenta quella delle corrispondenti coordinate cilindriche (vedi figura a)

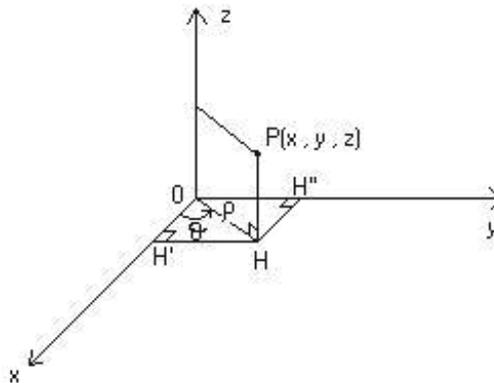


Figura a

Ovviamente le relazioni che legano i due tipi di coordinate sono:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Consideriamo una spirale logaritmica piana di equazione, in coordinate polari,

$$\rho = ae^{k \cdot \vartheta} \quad \text{con } a, k \in R^+ \quad (1)$$

Nello spazio, la stessa equazione, in coordinate cilindriche, rappresenta una superficie cilindrica la cui intersezione con un generico piano perpendicolare all'asse z è, ovviamente, una spirale logaritmica piana. Chiameremo la (1) (considerata nello spazio) superficie spirale logaritmica cilindrica.

Nella figura b è rappresentata la superficie spirale logaritmica cilindrica di equazione $\rho = \varphi^{\frac{2}{\pi}}$, che diremo aurea (φ è il numero aureo $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$), ottenuta dalla (1) per $a=1$ e $k=(\ln \varphi)/(\pi/2)$.

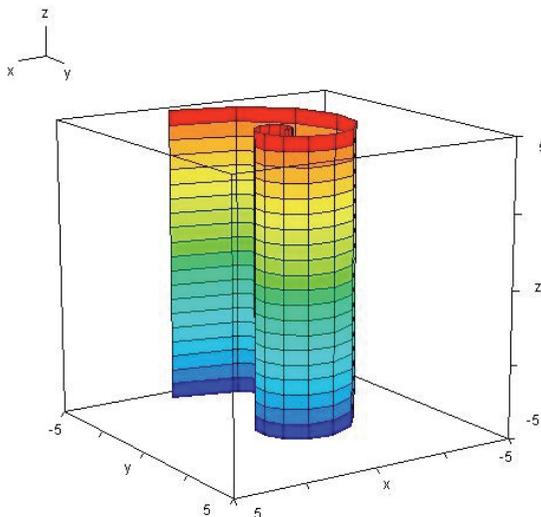


figura b

4. Le (curve) spirali logaritmiche tridimensionali

Le spirali logaritmiche nello spazio si possono pensare come intersezioni di una superficie spirale logaritmica cilindrica con una qualunque superficie $z=f(\rho)$ (con $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$), strettamente monotona, avente l'asse z come asse di simmetria e definita su tutto il piano xy , oppure su tutto il piano xy tranne che nel punto $O(0;0)$ (ovviamente si tratta di curve che verificano la proprietà di cui al paragrafo 2).

Si otterranno così due tipi di spirali logaritmiche nello spazio: il primo intersecando la spirale logaritmica cilindrica con una superficie che incontra l'asse z in un suo punto proprio, il secondo intersecando la spirale logaritmica cilindrica con una superficie che si avvicina asintoticamente all'asse z e quindi lo incontra in un suo punto improprio.

Per esempio consideriamo due spirali individuate rispettivamente dalle seguenti coppie di equazioni (in coordinate cilindriche):

$$\begin{cases} \rho = a \cdot e^{k \cdot \vartheta} \\ z = h \cdot \rho^t \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = a \cdot e^{k \cdot \vartheta} \\ z = \log_b \rho^t \end{cases} \quad \text{con } a, k, t \in \mathbb{R}^+ \text{ e } b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

(per semplicità le superfici con le quali intersechiamo la spirale logaritmica cilindrica intersecano rispettivamente l'asse z nell'origine del riferimento e il piano xy lungo la circonferenza di centro nell'origine e raggio unitario).

4.1 Successioni di punti che individuano spirali del primo tipo

Se $\{P_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ è una successione di punti nello spazio con coordinate cilindriche $(\rho_i, \vartheta_i, z_i)$ tali che i moduli ρ_i e le quote z_i siano in progressione geometrica di ragioni rispettivamente q_1 e q_2 , e le anomalie ϑ_i siano in progressione aritmetica di ragione p , cioè tale che:

$$\rho_i = \rho_{i-1} \cdot q_1 \quad \vartheta_i = \vartheta_{i-1} + p \quad z_i = z_{i-1} \cdot q_2,$$

tale successione individua nello spazio una spirale logaritmica del primo tipo con

$$k = \frac{\ln q_1}{p} \quad \text{e} \quad t = \log_{q_1} q_2 = \frac{\ln q_2}{\ln q_1}$$

Dimostrazione: La successione $\{P_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ si può pensare come l'unione di due successioni, entrambe di primo elemento P_0 , la prima con indici crescenti $(P_0, P_1, P_2, P_3, \dots)$, la seconda con indici decrescenti $(P_0, P_{-1}, P_{-2}, P_{-3}, \dots)$. Dimosteremo quanto sopra applicando il principio d'induzione separatamente alle due successioni.

Prima successione:

il punto $P_0(a, 0, ha^t)$ appartiene alla curva

$$\begin{cases} \rho = a \cdot e^{k \cdot \vartheta} \\ z = h \cdot \rho^t \end{cases}$$

quindi, per il principio d'induzione, basterà far vedere che, se P_{i-1} appartiene a tale curva, vi appartiene anche il punto P_i . A tale scopo, osserviamo che:

$$\begin{aligned} \rho_i &= \rho_{i-1} \cdot q_1 = ae^{k\vartheta_{i-1}} \cdot q_1 = ae^{\frac{\ln q_1 \vartheta_{i-1}}{p}} q_1 = aq_1^{\frac{\vartheta_{i-1}}{p}} q_1 = aq_1^{\frac{\vartheta_{i-1}+p}{p}} = aq_1^{\frac{\vartheta_i}{p}} = ae^{\frac{\ln q_1 \vartheta_i}{p}} \\ &= ae^{k\vartheta_i} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z_i &= z_{i-1} \cdot q_2 = h\rho_{i-1}^t \cdot q_2 = h(ae^{k\vartheta_{i-1}})^t q_2 = \\ &= h \left(ae^{\frac{\ln q_1 \vartheta_{i-1}}{p}} \right)^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} \cdot q_2 = ha^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} \cdot e^{\frac{\ln q_2 \vartheta_{i-1}}{p}} \cdot q_2 = ha^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} \cdot q_2^{\frac{\vartheta_{i-1}}{p}} \cdot q_2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ha^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} \cdot e^{\frac{\ln q_2 \cdot g_{i-1}}{p}} \cdot q_2 = ha^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} q_2^{\frac{g_{i-1}}{p}} \cdot q_2 = ha^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} q_2^{\frac{g_{i-1}+p}{p}} = \\
&= ha^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} q_2^{\frac{g_i}{p}} = ha^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} e^{\frac{\ln q_2 \cdot g_i}{p}} = h \left(ae^{\frac{\ln q_1 \cdot g_i}{p}} \right)^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} = h(ae^{k\theta_i})^t = h\rho_i^t
\end{aligned}$$

il che prova che P_i appartiene alla curva.

Seconda successione:

il punto $P_0(a, 0, ha^t)$ appartiene alla curva

$$\begin{cases} \rho = a \cdot e^{k \cdot g} \\ z = h \cdot \rho^t \end{cases}$$

quindi, per il principio d'induzione, basterà far vedere che, se P_i appartiene a tale curva, vi appartiene anche il punto P_{i-1} . A tale scopo, osserviamo che:

$$\begin{aligned}
\rho_{i-1} &= \rho_i \cdot q_1^{-1} = ae^{k\theta_i} \cdot q_1^{-1} = ae^{\frac{\ln q_1 \cdot g_i}{p}} \cdot q_1^{-1} = aq_1^{\frac{g_i}{p}} q_1^{-1} = aq_1^{\frac{g_i-p}{p}} = aq_1^{\frac{g_{i-1}}{p}} = ae^{\frac{\ln q_1 \cdot g_{i-1}}{p}} \\
&= ae^{k\theta_{i-1}}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
z_{i-1} &= z_i \cdot q_2^{-1} = h\rho_i^t \cdot q_2^{-1} = h(ae^{k\theta_i})^t q_2^{-1} = \\
&= h \left(ae^{\frac{\ln q_1 \cdot g_i}{p}} \right)^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} \cdot q_2^{-1} = ha^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} \cdot e^{\frac{\ln q_2 \cdot g_i}{p}} \cdot q_2^{-1} = ha^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} \cdot q_2^{\frac{g_{i-1}}{p}} \cdot q_2^{-1} = \\
&= ha^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} \cdot e^{\frac{\ln q_2 \cdot g_{i-1}}{p}} \cdot q_2^{-1} = ha^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} q_2^{\frac{g_i}{p}} \cdot q_2^{-1} = ha^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} q_2^{\frac{g_i-p}{p}} = ha^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} q_2^{\frac{g_{i-1}}{p}} = \\
&= ha^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} e^{\frac{\ln q_2 \cdot g_{i-1}}{p}} = h \left(ae^{\frac{\ln q_1 \cdot g_{i-1}}{p}} \right)^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} = h(ae^{k\theta_{i-1}})^t = h\rho_{i-1}^t
\end{aligned}$$

il che prova che P_{i-1} appartiene alla curva.

Quindi se i punti della successione $\{P_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ verificano le condizioni:

$$\boxed{\rho_i = \rho_{i-1} \cdot q_1 \quad \mathcal{G}_i = \mathcal{G}_{i-1} + p \quad z_i = z_{i-1} \cdot q_2}$$

tale successione individua nello spazio una spirale logaritmica del tipo

$$\begin{cases} \rho = a \cdot e^{k \cdot \mathcal{G}} \\ z = h \cdot \rho^t \end{cases}$$

con

$$k = \frac{\ln q_1}{p} \quad \text{e} \quad t = \log_{q_1} q_2 = \frac{\ln q_2}{\ln q_1}$$

($z_i = z_{i-1} \cdot q_2$, cioè che le quote siano in progressione geometrica di ragione q_2 , è la condizione in più che per le spirali tridimensionali del primo tipo è necessaria rispetto a quanto detto nel secondo paragrafo).

Come esempio, se $\rho_0 = z_0 = 1$ e

$$\rho_i = \rho_{i-1} \cdot \varphi \quad z_i = z_{i-1} \cdot \varphi \quad \mathcal{G}_i = \mathcal{G}_{i-1} + \frac{\pi}{2},$$

la successione $\{P_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ individua la spirale (che diremo aurea del primo tipo)

$$\begin{cases} \rho = \varphi^{\frac{2 \cdot \mathcal{G}}{\pi}} \\ z = \rho \end{cases}$$

Nella figura *c* sono rappresentate singolarmente le due superfici la cui intersezione genera una spirale del primo tipo:

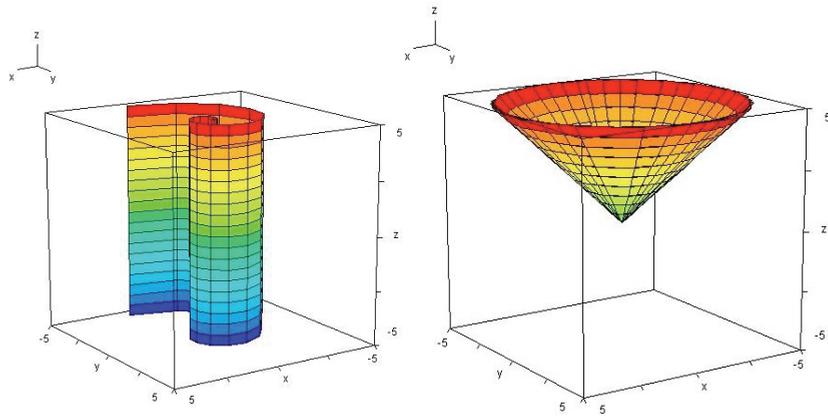


figura *c*

(si tratta della superficie spirale logaritmica cilindrica definita nel terzo paragrafo e della superficie conica indefinita a una falda avente vertice in O e angolo di apertura di 45°).

Nella figura *d* è rappresentata l'intersezione delle due superfici, vista da angolazioni diverse:

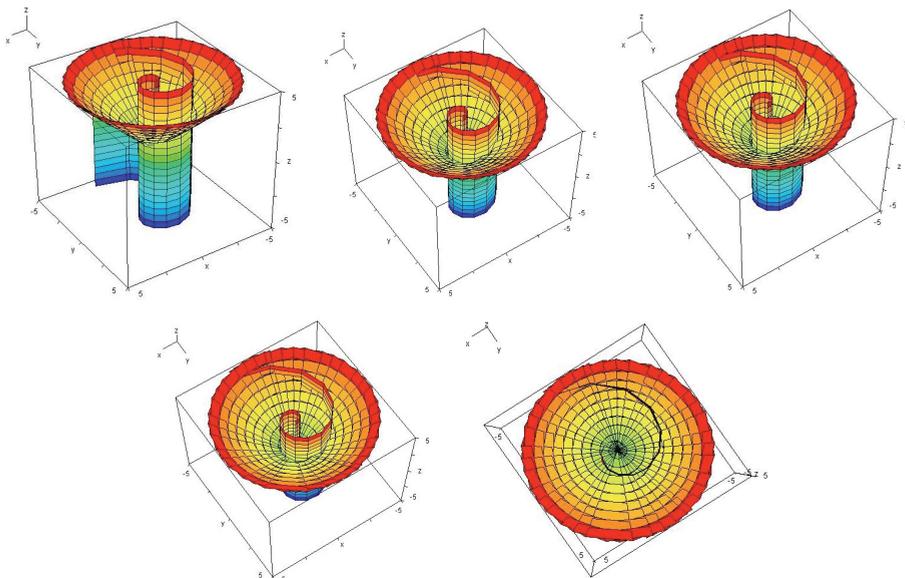


figura *d*

4.2 Successioni di punti che individuano spirali del secondo tipo

Se $\{P_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ è una successione di punti nello spazio con coordinate cilindriche $(\rho_i, \mathcal{G}_i, z_i)$ tali che i moduli ρ_i siano in progressione geometrica di ragioni q , e le anomalie \mathcal{G}_i e le quote z_i siano in progressioni aritmetiche di ragione rispettivamente p_1 e p_2 , cioè tale che:

$$\rho_i = \rho_{i-1} \cdot q \quad \mathcal{G}_i = \mathcal{G}_{i-1} + p_1 \quad z_i = z_{i-1} + p_2,$$

tale successione individua nello spazio una spirale logaritmica del secondo tipo con

$$k = \frac{\ln q}{p_1} \quad \text{e} \quad t = \frac{p_2}{\log_b q} = p_2 \cdot \frac{\ln b}{\ln q}$$

(se $b=e$, risulterà $t = \frac{p_2}{\ln q}$)

Dimostrazione: Analogamente a quanto fatto per le spirali del primo tipo, anche in questo caso dimostreremo quanto sopra applicando il principio d'induzione separatamente alle due successioni di primo elemento P_0 , la prima con indici crescenti, la seconda con indici decrescenti; inoltre, per quanto riguarda la funzione $\rho(\mathcal{g})$, la dimostrazione, per le due successioni, è quella del paragrafo precedente, dato che la superficie logaritmica cilindrica è la stessa e pertanto non la riporteremo nuovamente, ma ci limiteremo ad applicare il principio d'induzione solo alla superficie di equazione $z=f(\rho)$.

Prima successione:

il punto $P_0(a, 0, \log_b a^t)$ appartiene alla curva:

$$\begin{cases} \rho = a \cdot e^{k \cdot g} \\ z = \log_b \rho^t \end{cases}$$

quindi, per il principio d'induzione, basterà far vedere che, se P_{i-1} appartiene a tale curva vi appartiene anche il punto P_i . A tale scopo, osserviamo che:

$$\begin{aligned} z_i &= z_{i-1} + p_2 = \log_b \rho_{i-1}^t + p_2 = \log_b \left(a e^{k g_{i-1}} \right)^t + p_2 = \\ &= \log_b \left(a e^{\frac{\ln q}{p_1} g_{i-1}} \right)^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} + p_2 = \log_b a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} \cdot e^{p_2 \frac{\ln b}{p_1} g_{i-1}} + p_2 = \\ &= \log_b a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} + \log_b b^{\frac{p_2}{p_1} g_{i-1}} + \log_b b^{p_2} = \log_b a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} + \log_b b^{p_2 \left(\frac{g_{i-1} + p_1}{p_1} \right)} = \\ &= \log_b a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} + \log_b b^{\frac{p_2}{p_1} g_i} = \log_b \left(a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} \cdot b^{\frac{p_2}{p_1} g_i} \right) = \\ &= \log_b \left(a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} \cdot e^{p_2 \frac{\ln b}{p_1} g_i} \right) = \log_b \left(a \cdot e^{\frac{\ln q}{p_1} g_i} \right)^{\frac{\ln b}{\ln q} p_2} = \log_b \left(a e^{k g_i} \right)^t = \log_b \rho_i^t \end{aligned}$$

il che prova che P_i appartiene alla curva.

Seconda successione:

il punto $P_0(a, 0, \log_b a^t)$ appartiene alla curva:

$$\begin{cases} \rho = a \cdot e^{k \cdot g} \\ z = \log_b \rho^t \end{cases}$$

quindi, per il principio d'induzione, basterà far vedere che, se P_i appartiene a tale curva, vi appartiene anche il punto P_{i-1} . A tale scopo, osserviamo che:

$$\begin{aligned}
z_{i-1} &= z_i - p_2 = \log_b \rho_i^t - p_2 = \log_b \left(a e^{k \mathcal{G}_i} \right)^t - p_2 = \\
&= \log_b \left(a e^{\frac{\ln q \cdot \mathcal{G}_i}{p_1}} \right)^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} - p_2 = \log_b a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} \cdot e^{p_2 \frac{\ln b}{p_1} \mathcal{G}_i} - p_2 = \\
&= \log_b a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} + \log_b b^{\frac{p_2 \cdot \mathcal{G}_i}{p_1}} - \log_b b^{p_2} = \log_b a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} + \log_b b^{p_2 \left(\frac{\mathcal{G}_i - p_1}{p_1} \right)} = \\
&= \log_b a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} + \log_b b^{\frac{p_2 \cdot \mathcal{G}_{i-1}}{p_1}} = \log_b \left(a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} \cdot b^{\frac{p_2 \cdot \mathcal{G}_{i-1}}{p_1}} \right) = \\
&= \log_b \left(a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} \cdot e^{p_2 \frac{\ln b}{p_1} \mathcal{G}_{i-1}} \right) = \\
&= \log_b \left(a \cdot e^{\frac{\ln q \cdot \mathcal{G}_{i-1}}{p_1}} \right)^{\frac{\ln b}{\ln q} p_2} = \log_b \left(a e^{k \mathcal{G}_{i-1}} \right)^t = \log_b \rho_{i-1}^t
\end{aligned}$$

il che prova che P_{i-1} appartiene alla curva.

Quindi se i punti della successione $\{P_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ verificano le condizioni:

$$\rho_i = \rho_{i-1} \cdot q \quad \mathcal{G}_i = \mathcal{G}_{i-1} + p_1 \quad z_i = z_{i-1} + p_2$$

tale successione individua nello spazio una spirale logaritmica del tipo

$$\begin{cases} \rho = a \cdot e^{k \cdot \mathcal{G}} \\ z = \log_b \rho^t \end{cases}$$

con

$$k = \frac{\ln q}{p_1} \quad \text{e} \quad t = \frac{p_2}{\log_b q} = p_2 \cdot \frac{\ln b}{\ln q}$$

($z_i = z_{i-1} + p_2$, cioè che le quote siano in progressione aritmetica di ragione p_2 , è la condizione in più che per le spirali tridimensionali

del secondo tipo è necessaria rispetto a quanto detto nel secondo paragrafo).

Come esempio, se $\rho_0 = 1, z_0 = 0, b = \varphi$ e

$$\rho_i = \rho_{i-1} \cdot \varphi \quad \mathcal{G}_i = \mathcal{G}_{i-1} + \frac{\pi}{2},$$

la successione $\{P_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ individua la spirale (che diremo aurea del secondo tipo)

$$\begin{cases} \rho = \varphi^z \\ z = \log_{\varphi} \rho \end{cases}$$

Nella figura *e* sono rappresentate singolarmente le due superfici la cui intersezione genera una spirale del secondo tipo:

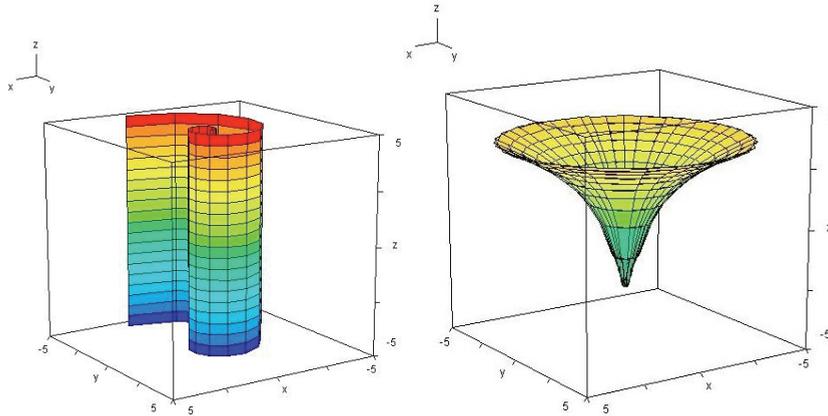


figura *e*

(si tratta della superficie spirale logaritmica cilindrica definita nel terzo paragrafo e della superficie individuata dalla rotazione completa intorno all'asse z del grafico della funzione logaritmica avente equazione, nel piano yz , $z = \log_{\varphi} y$)

Nella figura f è rappresentata l'intersezione delle due superfici, vista da angolazioni diverse:

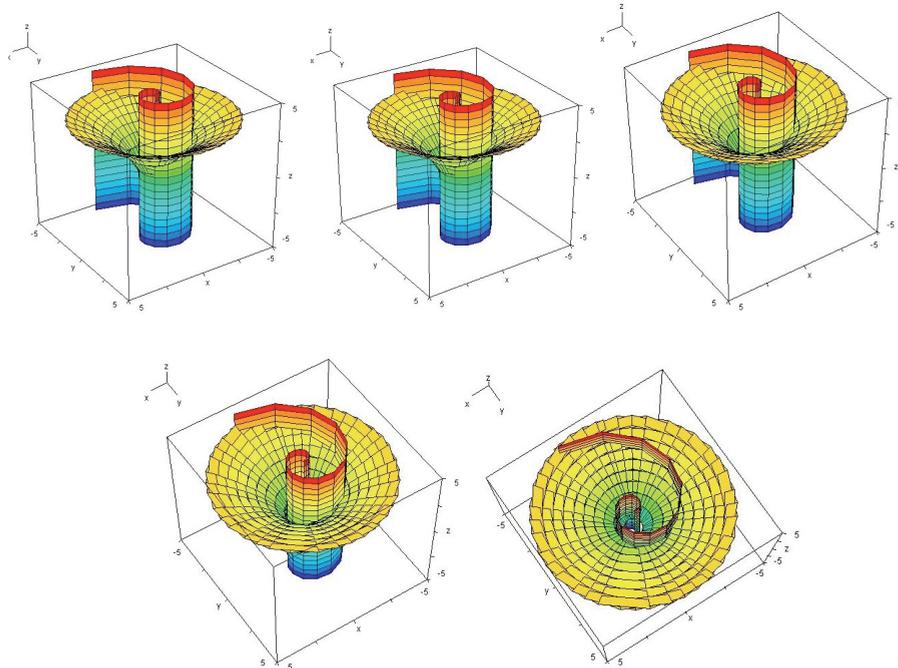


figura f

Bibliografia

- [1] L. CAMPEDELLI, *Lezioni di geometria*, Cedam, Padova, 1966.
- [2] E. TORRICELLI, *De infinitis spiralibus* (trad. E. Carruccio), "Quaderni di Storia e critica della Scienza", n° 3, 1955.

CAPITOLO V

SULLE SERIE ARMONICHE GENERALIZZATE

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\text{CON } S \text{ PARI})$$

Sunto: In questo lavoro, partendo dagli sviluppi in serie di Fourier delle funzioni $y = x^s$, con s numero intero positivo pari, si ottiene una formula ricorsiva per il calcolo della somma della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Abstract: In this work, starting from the development in series of Fourier of the functions $y = x^s$, with s an even positive integer number, we obtain a recursive formula for the computation of the sum of the generalized harmonic series $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Parole chiave: funzione pari, funzione dispari, serie di funzioni, prolungamento periodico, serie trigonometrica, serie di Fourier, sviluppo in serie di Fourier.

1. Cenni sulla serie di Fourier

Data una funzione $f(x)$ periodica, di periodo 2π e integrabile nell'intervallo $[-\pi; \pi]$, si definisce serie di Fourier di $f(x)$ la serie trigonometrica:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$$

in cui:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx$$

con $n = 1, 2, 3, \dots$

La serie di Fourier di una funzione $f(x)$ converge e ha come somma proprio la $f(x)$ (quindi tale funzione può essere rappresentata mediante la sua serie di Fourier), se sono verificate le ipotesi del teorema di Dirichlet.

Il teorema di Dirichlet sulla sviluppabilità di una funzione in serie di Fourier afferma che se $f(x)$ è una funzione periodica di periodo 2π , continua a tratti¹ nell'intervallo $[-\pi; \pi]$ e se tale intervallo può essere suddiviso in un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali $f(x)$ è monotona, allora la serie di Fourier di $f(x)$ è convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$ e la somma $\hat{f}(x)$ della serie nell'intervallo $[-\pi; \pi]$ è così definita: $\hat{f}(x) = f(x)$ nei punti $x \in]-\pi; \pi[$, $\hat{f}(x)$ uguale alla semisomma dei limiti sinistro e destro della $f(x)$ nei punti di discontinuità dell'intervallo $]-\pi; \pi[$, $\hat{f}(x)$ uguale alla semisomma dei limiti della $f(x)$ per x che tende a $-\pi$ da destra e per x che tende a π da sinistra per $x = -\pi$ e per $x = \pi$.

¹ Una funzione si dice continua a tratti in un intervallo, se in esso è continua o ha al massimo un numero finito di punti di discontinuità di prima o terza specie.

2. Sviluppo in serie di Fourier dei prolungamenti periodici delle funzioni $y = x^s$ (con s numero intero positivo pari) definite in $[-\pi; \pi]$

I prolungamenti periodici delle funzioni $y = x^s$ (con s numero intero positivo pari), definite nell'intervallo $[-\pi; \pi]$, verificano le condizioni del teorema di Dirichlet e ognuno di essi coincide, per ogni x , con la somma della sua serie di Fourier (non ci sono punti di discontinuità e $\hat{f}(x) = f(x)$ anche in $-\pi$ e in π , essendo $\hat{f}(\pm\pi) = f(\pm\pi) = \pi^s$).

I coefficienti di Fourier di tali funzioni, dato che x^s e $x^s \cdot \cos(nx)$ sono pari e $x^s \cdot \sin(nx)$ è dispari, sono:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^s dx \qquad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^s \cos(nx) dx \qquad b_n = 0$$

con $n = 1, 2, 3, \dots$

3. Sviluppo in serie di Fourier dei prolungamenti periodici delle funzioni $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$, $y = x^8$, definite in $[-\pi; \pi]$ e calcolo delle somme delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^8}$$

□ $y = x^2$

I coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di $y = x^2$, definita in $[-\pi; \pi]$, sono:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \operatorname{sen}(nx)}{n} + \frac{2x \cos(nx)}{n^2} - \frac{2 \operatorname{sen}(nx)}{n^3} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\pi \cos(n\pi)}{n^2} = \frac{4 \cos(n\pi)}{n^2}$$

Sarà quindi per ogni x :

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4 \cos(n\pi)}{n^2} \cdot \cos(nx)$$

Per $x = \pm \pi$ risulterà:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} \cdot (\cos(n\pi))^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

da cui si ricava facilmente che

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

□ $y = x^4$

I coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di $y = x^4$, definita in $[-\pi; \pi]$, sono:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{5} \pi^4$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^4 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^4 \operatorname{sen}(nx)}{n} + \frac{4x^3 \cos(nx)}{n^2} - \frac{12x^2 \operatorname{sen}(nx)}{n^3} + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{24x \cos(nx)}{n^4} + \frac{24 \operatorname{sen}(nx)}{n^5} \right]_0^\pi = \\
 &= \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{4\pi^3 \cos(n\pi)}{n^2} - \frac{24\pi \cos(n\pi)}{n^4} \right] = \frac{8\pi^2 \cos(n\pi)}{n^2} - \frac{48 \cos(n\pi)}{n^4}
 \end{aligned}$$

Sarà quindi, per ogni x :

$$x^4 = \frac{1}{5} \pi^4 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{8\pi^2}{n^2} - \frac{48}{n^4} \right) \cos(n\pi) \cdot \cos(nx) \right)$$

Per $x = \pm \pi$ risulterà:

$$\begin{aligned}
 \pi^4 &= \frac{1}{5} \pi^4 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{8\pi^2}{n^2} - \frac{48}{n^4} \right) (\cos(n\pi))^2 \right) = \\
 &= \frac{1}{5} \pi^4 + 8\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 48 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{5} \pi^4 + 8\pi^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} - 48 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}
 \end{aligned}$$

da cui si ricava facilmente che

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$$

□ $y = x^6$

I coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di $y = x^6$, definita in $[-\pi; \pi]$, sono:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^6 dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^7}{7} \right]_0^\pi = \frac{2}{7} \pi^6$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^6 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^6 \operatorname{sen}(nx)}{n} + \frac{6x^5 \cos(nx)}{n^2} - \frac{30x^4 \operatorname{sen}(nx)}{n^3} + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{120x^3 \cos(nx)}{n^4} + \frac{360x^2 \operatorname{sen}(nx)}{n^5} + \frac{720x \cos(nx)}{n^6} - \frac{720 \operatorname{sen}(nx)}{n^7} \right]_0^\pi = \\
 &= \left(\frac{12\pi^4}{n^2} - \frac{240\pi^2}{n^4} + \frac{1440}{n^6} \right) \cdot \cos(n\pi)
 \end{aligned}$$

Sarà quindi per ogni x :

$$x^6 = \frac{1}{7} \pi^6 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{12\pi^4}{n^2} - \frac{240\pi^2}{n^4} + \frac{1440}{n^6} \right) \cos(n\pi) \cdot \cos(nx) \right)$$

Per $x = \pm \pi$ sarà quindi:

$$\begin{aligned}
 \pi^6 &= \frac{1}{7} \pi^6 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{12\pi^4}{n^2} - \frac{240\pi^2}{n^4} + \frac{1440}{n^6} \right) (\cos(n\pi))^2 \right) = \\
 &= \frac{1}{7} \pi^6 + 12\pi^4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 240\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} + 1440 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \\
 &= \frac{1}{7} \pi^6 + 12\pi^4 \cdot \frac{\pi^2}{6} - 240\pi^2 \cdot \frac{\pi^4}{90} + 1440 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}
 \end{aligned}$$

da cui si ricava facilmente che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

□ $y = x^8$

I coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di $y = x^8$, definita in $[-\pi; \pi]$, sono:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^8 dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^9}{9} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{9} \pi^8$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^8 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^8 \sin(nx)}{n} + \frac{8x^7 \cos(nx)}{n^2} - \frac{56x^6 \sin(nx)}{n^3} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{336x^5 \cos(nx)}{n^4} + \frac{1680x^4 \sin(nx)}{n^5} + \frac{6720x^3 \cos(nx)}{n^6} - \frac{20160x^2 \sin(nx)}{n^7} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{40320x \cos(nx)}{n^8} + \frac{40320 \sin(nx)}{n^9} \right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{8\pi^7}{n^2} - \frac{336\pi^5}{n^4} + \frac{6720\pi^3}{n^6} - \frac{40320\pi}{n^8} \right) \cdot \cos(n\pi) = \\ &= \left(\frac{16\pi^6}{n^2} - \frac{672\pi^4}{n^4} + \frac{13440\pi^2}{n^6} - \frac{80640}{n^8} \right) \cdot \cos(n\pi) \end{aligned}$$

Sarà quindi per ogni x :

$$x^8 = \frac{1}{9} \pi^8 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{16\pi^6}{n^2} - \frac{672\pi^4}{n^4} + \frac{13440\pi^2}{n^6} - \frac{80640}{n^8} \right) \cos(n\pi) \cdot \cos(nx) \right)$$

Per $x = \pm \pi$ risulterà:

$$\begin{aligned} \pi^8 &= \frac{1}{9} \pi^8 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{16\pi^6}{n^2} - \frac{672\pi^4}{n^4} + \frac{13440\pi^2}{n^6} - \frac{80640}{n^8} \right) (\cos(n\pi))^2 \right) = \\ &= \frac{1}{9} \pi^8 + 16\pi^6 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 672\pi^4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} + 13440\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} - 80640 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^8} = \\ &= \frac{1}{9} \pi^8 + 16\pi^6 \cdot \frac{\pi^2}{6} - 672\pi^4 \cdot \frac{\pi^4}{90} + 13440 \cdot \frac{\pi^6}{945} - 80640 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^8} \end{aligned}$$

da cui si ricava facilmente che

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}}$$

4. Formula ricorsiva per il calcolo della somma della generica serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ con s numero intero positivo pari

In generale, i coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di $y = x^s$, definita in $[-\pi; \pi]$, con s intero positivo pari, sono:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^s dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^{s+1}}{s+1} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{s+1} \pi^s \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^s \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^s \sin(nx)}{n} + \frac{s x^{s-1} \cos(nx)}{n^2} - \frac{s(s-1) x^{s-2} \sin(nx)}{n^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{s(s-1)(s-2) x^{s-3} \cos(nx)}{n^4} + \dots + (-1)^{\frac{s}{2}-1} \frac{s! x \cos(nx)}{n^s} + (-1)^{\frac{s}{2}} \frac{s! \sin(nx)}{n^{s+1}} \right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{s \pi^{s-1}}{n^2} - \frac{s(s-1)(s-2) \pi^{s-3}}{n^4} + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4) \pi^{s-5}}{n^6} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \dots \frac{(-1)^{\frac{s}{2}-1} \cdot s! \pi}{n^s} \right] \cdot \cos(n\pi) \end{aligned}$$

Sarà quindi per ogni x :

$$x^s = \frac{\pi^s}{s+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \left[\frac{s\pi^{s-1}}{n^2} - \frac{s(s-1)(s-2)\pi^{s-3}}{n^4} + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)\pi^{s-5}}{n^6} - \dots \right. \\ \left. \dots \dots \dots + \frac{(-1)^{\frac{s-1}{2}} s! \pi}{n^s} \right] \cdot \cos(n\pi) \cos(nx)$$

Per $x = \pm \pi$:

$$\pi^s = \frac{\pi^s}{s+1} + \frac{2}{\pi} \left(s\pi^{s-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - s(s-1)(s-2)\pi^{s-3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} + \right. \\ \left. + s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)\pi^{s-5} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} + \dots \dots \dots + (-1)^{\frac{s-1}{2}} s! \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \right)$$

$$\pi^s = \frac{\pi^s}{s+1} + 2s\pi^{s-2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 2s(s-1)(s-2)\pi^{s-4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} + \\ + 2s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)\pi^{s-6} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} + \dots \dots \dots + 2(-1)^{\frac{s-1}{2}} s! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Risulterà quindi:

$$2(-1)^{\frac{s-1}{2}} s! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \pi^s - \frac{\pi^s}{s+1} - 2s\pi^{s-2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + 2s(s-1)(s-2)\pi^{s-4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} + \\ - 2s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)\pi^{s-6} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} + \dots 2s(s-1)(s-2) \dots (s-(s-4))\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{s-2}}$$

da cui:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = (-1)^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{\pi^s s}{2(s+1)!} + \sum_{i=1}^{\frac{s-1}{2}} (-1)^i \left(\frac{\pi^{s-2i}}{(s-2i+1)!} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2i}} \right) \right)}$$

Bibliografia

- [1] L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Losanna, 1748.
- [2] L. Euler, *Opera omnia*, v. XIV.
- [3] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, 1822.
- [4] G. L. Dirichlet, *Sur la convergence des séries trigonométrique*, Jour. Für Math., IV (1828).

CAPITOLO VI

SULLE SERIE ALTERNATE

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s} \quad (\text{CON } s \text{ DISPARI})$$

Sunto: In questo lavoro, partendo dagli sviluppi in serie di Fourier delle funzioni $y = x^s$, con s numero naturale dispari, si ottiene una formula ricorsiva per il calcolo delle somme delle serie alternate

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s}.$$

Abstract: In this work, starting from the development in series of Fourier of the functions $y = x^s$, with s an uneven natural number, we obtain a recursive formula for the computation of the sums of the

alternated series $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s}$.

Parole chiave: funzione pari, funzione dispari, serie di funzioni, prolungamento periodico, serie trigonometrica, serie di Fourier, sviluppo in serie di Fourier.

1. Introduzione

In un articolo pubblicato su questo periodico¹ si dimostra come,

¹ Cfr. C. Carano, *Sulle serie armoniche generalizzate*, Periodico di Matematiche, n. 3, 2008.

partendo dagli sviluppi in serie di Fourier² dei prolungamenti periodici delle funzioni $y = x^s$ (con s numero naturale pari) definite in $[-\pi; \pi]$, si ottiene una formula ricorsiva per il calcolo delle somme delle serie armoniche generalizzate $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

In questo articolo, procedendo allo stesso modo per le funzioni $y = x^s$, con s numero naturale dispari, si ottiene a una formula ricorsiva per il calcolo delle somme delle serie alternate $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s}$.

² Data una funzione $f(x)$, periodica di periodo 2π e integrabile nell'intervallo $[-\pi; \pi]$, si definisce serie di Fourier di $f(x)$ la serie trigonometrica:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx))$$

in cui:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(nx) dx$$

con $n = 1, 2, 3, \dots$

La serie di Fourier di una funzione $f(x)$ converge e ha come somma proprio la $f(x)$ se è verificato il teorema di Dirichlet: se $f(x)$ è una funzione periodica di periodo 2π , continua a tratti nell'intervallo $[-\pi; \pi]$, (cioè se in $[-\pi; \pi]$, è continua o ha al massimo un numero finito di punti di discontinuità di prima o terza specie) e se tale intervallo può essere suddiviso in un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali $f(x)$ è monotona, allora la serie di Fourier di $f(x)$ è convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$ e la somma $\hat{f}(x)$ della serie nell'intervallo $[-\pi; \pi]$, è così definita: $\hat{f}(x) = f(x)$ nei punti $x \in]-\pi; \pi[$, $\hat{f}(x)$ uguale alla semisomma dei limiti sinistro e destro della $f(x)$ nei punti di discontinuità dell'intervallo $]-\pi; \pi[$, $\hat{f}(x)$ uguale alla semisomma dei limiti della $f(x)$ per x che tende a $-\pi$ da destra e per x che tende a π da sinistra per $x = -\pi$ e per $x = \pi$.

2. Sviluppo in serie di Fourier dei prolungamenti periodici delle funzioni $y = x^s$ (con s numero naturale dispari) definite in $[-\pi; \pi]$

I prolungamenti periodici delle funzioni $y = x^s$ (con s numero naturale dispari), definite nell'intervallo $[-\pi; \pi]$, verificano le condizioni del teorema di Dirichlet; quindi la serie di Fourier $\hat{f}(x)$ di ognuna di tali funzioni è così definita: $\hat{f}(x) = x^s$ per ogni $x \in]\pi; \pi [$ e $\hat{f}(\pm\pi) = (-\pi^s + \pi^s) / 2 = 0$.

I coefficienti di Fourier di tali funzioni, dato che x^s e $x^s \cdot \cos(nx)$ sono funzioni dispari e $x^s \cdot \sin(nx)$ è una funzione pari, sono:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^s dx = 0 \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^s \cos(nx) dx = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^s \sin(nx) dx$$

con $n = 1, 2, 3, \dots$

3. Sviluppo in serie di Fourier dei prolungamenti periodici delle funzioni $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$, definite in $[-\pi; \pi]$ e calcolo delle somme delle serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^5}$$

(In quanto segue, tenere presente che $\cos(n\pi) = (-1)^n$ e $\sin(n\pi/2)$ è uguale a 0 per n pari e alternativamente a 1 o a -1 per n dispari)

□ $y = x$

I coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di $y = x$, definita in $[-\pi; \pi]$, sono:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos(nx)}{n} + \frac{2 \operatorname{sen}(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left[-\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} \right) \cos(n\pi) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} \right) (-1)^n \end{aligned}$$

Sarà quindi per ogni $x \in]-\pi; \pi [$:

$$x = \frac{2}{\pi} \left(-\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen}(nx) \right) = \frac{2}{\pi} \left(\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx) \right)$$

Per $x = \frac{\pi}{2}$ risulterà:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi} \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \left(n \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi} \left(\pi \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots \right) \right)$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi} \pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

da cui si ricava che

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}}$$

□ $y = x^3$

I coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di $y = x^3$, definita in $[-\pi; \pi]$, sono:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^3 \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x^3 \cos(nx)}{n} + \frac{3x^2 \operatorname{sen}(nx)}{n^2} + \frac{6x \cos(nx)}{n^3} + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{6 \operatorname{sen}(nx)}{n^4} \right]_0^\pi = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi^3}{n} + \frac{6\pi}{n^3} \right) \cos(n\pi) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi^3}{n} + \frac{6\pi}{n^3} \right) (-1)^n
 \end{aligned}$$

Sarà quindi, per ogni $x \in]-\pi; \pi [$:

$$x^3 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{\pi^3}{n} + \frac{6\pi}{n^3} \right) (-1)^n \operatorname{sen}(nx) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi^3}{n} - \frac{6\pi}{n^3} \right) (-1)^{n+1} \operatorname{sen}(nx)$$

Per $x = \frac{\pi}{2}$ risulterà:

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi^3}{8} &= \frac{2}{\pi} \pi^3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi} 6\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{2}\right) \\
 \frac{\pi^3}{8} &= \frac{2}{\pi} \left(\pi^3 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right) + 6\pi \left(-1 + \frac{1}{27} - \frac{1}{125} + \dots \right) \right) \\
 \frac{\pi^3}{8} &= \frac{2}{\pi} \pi^3 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} - \frac{2}{\pi} 6\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}
 \end{aligned}$$

da cui si ricava che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{1}{12} \left(-\frac{\pi^3}{8} + 2\pi^2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^3}{32}$$

□ $y = x^5$

I coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di $y = x^5$, definita in $[-\pi; \pi]$, sono:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^5 \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x^5 \cos(nx)}{n} + \frac{5x^4 \operatorname{sen}(nx)}{n^2} + \frac{20x^3 \cos(nx)}{n^3} + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{60x^2 \operatorname{sen}(nx)}{n^4} - \frac{120x \cos(nx)}{n^5} + \frac{120 \operatorname{sen}(nx)}{n^6} \right]_0^{\pi} = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi^5}{n} + \frac{20\pi^3}{n^3} - \frac{120\pi}{n^5} \right) \cos(n\pi) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi^5}{n} + \frac{20\pi^3}{n^3} - \frac{120\pi}{n^5} \right) (-1)^n
 \end{aligned}$$

Sarà quindi per ogni $x \in]-\pi; \pi [$:

$$x^5 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(-\frac{\pi^5}{n} + \frac{20\pi^3}{n^3} - \frac{120\pi}{n^5} \right) \cdot \operatorname{sen}(nx)$$

Per $x = \frac{\pi}{2}$ risulterà:

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi^5}{32} &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{\pi^5}{2k-1} - \frac{20\pi^3}{(2k-1)^3} + \frac{120\pi}{(2k-1)^5} \right) \\
 \frac{\pi^5}{32} &= \frac{2}{\pi} \pi^5 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} - \frac{2}{\pi} 20\pi^3 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} + \frac{2}{\pi} 120\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^5}
 \end{aligned}$$

da cui si ricava che

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^5} = \frac{1}{240} \left(\frac{\pi^5}{32} - \frac{\pi^5}{2} + \frac{5\pi^5}{4} \right) = \frac{5}{1536} \pi^5}$$

4. Formula ricorsiva per il calcolo della somma della generica serie alternata $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s}$ con s numero naturale dispari

Generalizzando le formule ottenute nel paragrafo precedente per il calcolo di $\frac{\pi^s}{2^s}$ con $s = 1, 3, 5$ al caso di s numero naturale dispari qualunque, si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^s}{2^s} &= 2\pi^{s-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} - 2s(s-1)\pi^{s-3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} + 2s(s-1)(s-2)(s-3) \cdot \\ &\cdot \pi^{s-5} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^5} + \dots + (-1)^{\frac{s-3}{2}} 2s(s-1)(s-2) \cdot \dots \cdot 2\pi^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^{s-2}} + \\ &+ (-1)^{\frac{s-1}{2}} 2s! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s} \end{aligned}$$

e quindi:

$$(-1)^{\frac{s-1}{2}} 2s! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s} = \frac{\pi^s}{2^s} + 2 \sum_{i=1}^{\frac{s-1}{2}} (-1)^i \pi^{s-2i+1} \frac{s!}{(s-2i+2)!} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^{2i-1}}$$

da cui si ottiene la seguente formula ricorsiva:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s} = (-1)^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{\pi^s}{2^{s+1} \cdot s!} + \sum_{i=1}^{\frac{s-1}{2}} (-1)^i \left(\frac{\pi^{s-2i+1}}{(s-2i+2)!} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^{2i-1}} \right) \right)$$

Bibliografia

- [1] L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Losanna, 1748.
- [2] L. Euler, *De summis serierum reciprocarum*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 7, 1740, pp. 123-134.
- [3] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, 1822.
- [4] G. L. Dirichlet, *Sur la convergence des séries trigonométrique*, Jour. Für Math., IV (1828).3

Finito di stampare nel mese di ottobre del 2021
dalla tipografia «System Graphic S.r.l.»
via di Torre Sant'Anastasia, 61 – 00134 Roma