

CARMEN CARANO

LA DEFINIZIONE DI APOTEMA E L'EQUIVALENZA DI FIGURE GEOMETRICHE NEL PIANO E NELLO SPAZIO

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n l_i h_i}{\sum_{i=1}^n l_i} = \frac{2 \cdot \text{Area} (P_n)}{\text{Perimetro} (P_n)}$$



aracne



Classificazione Decimale Dewey

— 516.2 (23.) GEOMETRIA EUCLIDEA

Thema

— Soggetto: **PBMH. Geometria euclidea**

— Qualificatori: **4CN. Per l'istruzione secondaria secondaria/avanzata**

CARMEN CARANO

**LA DEFINIZIONE DI APOTEMA
E L'EQUIVALENZA DI FIGURE GEOMETRICHE
NEL PIANO E NELLO SPAZIO**





ISBN
979-12-218-2673-9

PRIMA EDIZIONE
ROMA 30 APRILE 2026

A Napoli

INDICE

- 9 *Sunto*
- 10 *Abstract*
- 10 1. Generalizzazione della definizione di apotema di un poligono e equivalenza tra un poligono e un triangolo
- 12 2. Definizione di apotema di un cerchio e equivalenza tra un cerchio e un triangolo
- 14 3. Come disegnare uno degli infiniti triangoli equivalenti a un cerchio e in generale a un settore circolare
- 19 4. Equivalenza tra la superficie di un poligono regolare esterna al cerchio in esso inscritto e un settore circolare
- 22 5. Definizione di apotema di un poliedro e equivalenza tra un poliedro e un tetraedro
- 24 6. Definizione di apotema di un cono, di un cilindro, di una sfera e equivalenza tra ognuna di tali figure geometriche e un tetraedro
- 29 7. Definizione generale di apotema di una figura geometrica convessa

LA DEFINIZIONE DI APOTEMA E L'EQUIVALENZA DI FIGURE GEOMETRICHE NEL PIANO E NELLO SPAZIO

CARMEN CARANO

SUNTO: In questo lavoro si dà una definizione unitaria del concetto di apotema, prima per figure geometriche convesse piane (per le quali si generalizza la definizione nota di apotema di un poligono regolare) e a seguire per figure geometriche convesse solide (per le quali la nuova definizione è del tutto diversa da quella che viene comunemente data di apotema di piramide e di cono).

Si verifica l'equivalenza nel piano tra un generico poligono o un cerchio (e quindi anche un settore circolare), e un triangolo (e si descrive come costruire un triangolo equivalente a un cerchio, e un triangolo equivalente a un settore circolare; si dimostra poi che la superficie di un poligono regolare circoscritto a un cerchio e esterna a tale cerchio è equivalente a un settore circolare, e quindi a un triangolo).

Si verifica l'equivalenza nello spazio tra un generico poliedro, un cono, un cilindro o una sfera, e un tetraedro.

Infine si arriva a una definizione unitaria del concetto di apotema di figure geometriche convesse (piane e solide).

ABSTRACT: This paper provides a unified definition of the concept of apothem, first for convex plane geometric figures (for which the known definition of the apothem of a regular polygon is generalized) and then for convex solid geometric figures (for which the new definition is completely different from the commonly given definition of the apothem of a pyramid and a cone).

The equivalence in the plane between a generic polygon or circle (and therefore also a circular sector) and a triangle is verified (and how to construct a triangle equivalent to a circle, and a triangle equivalent to a circular sector is described; it is then shown that the surface of a regular polygon circumscribed about a circle and external to that circle is equivalent to a circular sector, and therefore to a triangle).

The equivalence in space between a generic polyhedron, a cone, a cylinder, or a sphere, and a tetrahedron is verified.

Finally, we arrive at a unitary definition of the concept of apothem of convex geometric figures (plane and solid).

I poligoni e i poliedri di cui si tratta nei paragrafi seguenti sono da considerarsi convessi.

1. Generalizzazione della definizione di apotema di un poligono e equivalenza tra un poligono e un triangolo

Si definisce apotema di un poligono regolare di n lati P_n il raggio del cerchio inscritto nel poligono; il poligono si può pensare come l'unione di tanti triangoli quanti sono

i suoi lati (ottenuti unendo il centro del cerchio ai vertici del poligono stesso), aventi per basi i lati del poligono e per altezza il suo apotema, e pertanto è equivalente a un triangolo avente base uguale al perimetro del poligono e altezza uguale al suo apotema.

La definizione di apotema può essere così modificata: si definisce apotema di un poligono regolare l'altezza degli infiniti triangoli di base uguale al perimetro del poligono ed equivalenti al poligono stesso. Tale definizione permette di generalizzare il concetto di apotema anche a un poligono P_n generico; ciò è ovvio se il poligono, pur non essendo regolare, è circoscrivibile a un cerchio (in tal caso l'apotema è ancora il raggio di tale cerchio); in generale, considerato un poligono qualsiasi di n lati di lunghezze $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$, esso può essere diviso in n triangoli, unendo un generico punto interno al poligono ai suoi vertici; indicate con $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ le altezze di tali triangoli, definiremo come segue l'apotema a di P_n :

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n l_i h_i}{\sum_{i=1}^n l_i} = \frac{2 \cdot Area(P_n)}{Perimetro(P_n)}.$$

Pertanto P_n sarà equivalente a un triangolo di base uguale al suo perimetro e altezza a .

Definiamo apotema di un generico poligono l'altezza degli infiniti triangoli ad esso equivalenti, aventi la base uguale al suo perimetro.

(se il poligono è regolare, o se comunque è possibile inscrivere in esso un cerchio, come detto, l'apotema del poligono coincide con il raggio del cerchio in esso inscritto).

Se il poligono P_n è regolare, indicata con l la misura dei suoi lati, il suo apotema, e quindi il raggio del cerchio inscrivibile in P_n , sarà:

$$a = \frac{l}{2} \cdot \cot an \frac{\pi}{n}$$

$$Area(P_n) = \frac{a \cdot Perimetro(P_n)}{2} = \frac{nl^2}{4} \cot an \frac{\pi}{n}$$

2. Definizione di apotema di un cerchio e equivalenza tra un cerchio e un triangolo

Sia P_n un poligono regolare di n lati circoscritto a un cerchio C di raggio r ; al crescere di n si otterranno poligoni, tutti di apotema $a = r$, che si avvicineranno sempre più a C . Il passaggio al limite, per n tendente a infinito, porterà al poligono regolare con infiniti lati di misura infinitesima, coincidente col cerchio di raggio r ; anche in tale situazione limite il cerchio continuerà a essere equivalente a un triangolo avente base di lunghezza pari a quella del suo contorno (che in questo caso è la circonferenza) e altezza r :

$$Area(C) = \frac{(2\pi \cdot r) \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2.$$

Analogamente a quanto visto per i poligoni, si definisce apotema di un cerchio l'altezza degli infiniti triangoli con base uguale alla circonferenza del cerchio ed equivalenti al cerchio stesso (per il quale sarà quindi ancora, come per tutti gli infiniti poligoni regolari P_n circoscritti a C al variare di n , $a = r$):

$$a = \frac{2 \cdot \text{Area}(C)}{\text{Circonferenza}(C)} = r.$$

Da ciò segue che anche un settore circolare S_q (q -esima parte del cerchio) è equivalente a un triangolo avente base di lunghezza l pari a quella dell'arco che sottende il settore e altezza r :

$$\text{Area}(S_q) = \text{Area}\left(\frac{C}{q}\right) = \frac{2\pi \cdot r}{q} = \frac{2\pi \cdot r}{2} = \frac{l \cdot r}{2}.$$

Da quanto visto in questo paragrafo e nel precedente, possiamo in generale dire che l'area di un qualunque poligono o di un cerchio è:

$$\text{area (poligono o cerchio)} = \text{misura del contorno (perimetro o circonferenza)} \times \text{apotema}/2$$

(il raggio del cerchio può essere considerato l'apotema di un poligono regolare, identificabile col cerchio stesso, avente infiniti lati di lunghezza infinitesima).

3. Come disegnare uno degli infiniti triangoli equivalenti a un cerchio e in generale a un settore circolare

Ci proponiamo di disegnare uno degli infiniti triangoli equivalenti a un cerchio. Consideriamo un cerchio di raggio r e centro nell'origine del riferimento cartesiano, sia A il punto d'intersezione della circonferenza col semiasse positivo delle x ; a partire da A , sulla retta passante per A parallela all'asse delle y , nel semipiano positivo delle y , determiniamo un punto B in modo tale che la lunghezza del segmento AB sia pari a quella della circonferenza.

Per individuare il punto B , determiniamo l'angolo δ avente come primo lato il semiasse positivo delle x e secondo la semiretta OB ; dovrà essere:

$$\overline{AB} = 2\pi r = r \cdot \tan \delta$$

da cui:

$$\delta = \tan^{-1} 2\pi \cong 80^{\circ}57'25''.$$

Il punto B sarà quindi l'intersezione della retta passante per A parallela all'asse y e della semiretta di origine O , situata nel primo quadrante, che forma col semiasse positivo delle x l'angolo $\delta = \tan^{-1} 2\pi$.

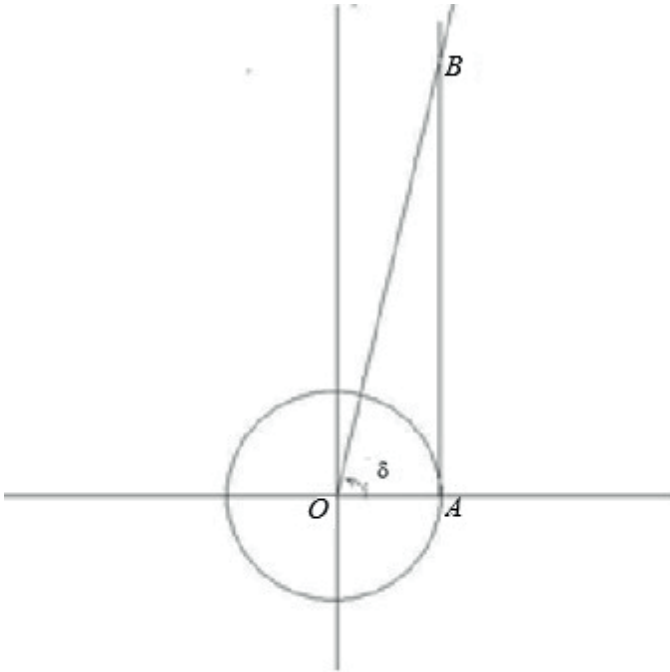


Figura 1.

Un cerchio di raggio r è, quindi, sempre equivalente a un triangolo rettangolo avente un cateto uguale a r e l'angolo acuto δ adiacente a esso di ampiezza pari a $\tan^{-1} 2\pi$ (ovviamente, in generale, tutti gli infiniti triangoli, aventi un lato di lunghezza uguale a $2\pi \cdot r$ e altezza relativa a tale lato uguale a r , saranno equivalenti a tale cerchio).

Risulteranno pertanto anche equivalenti le regioni piane evidenziate nella figura seguente:

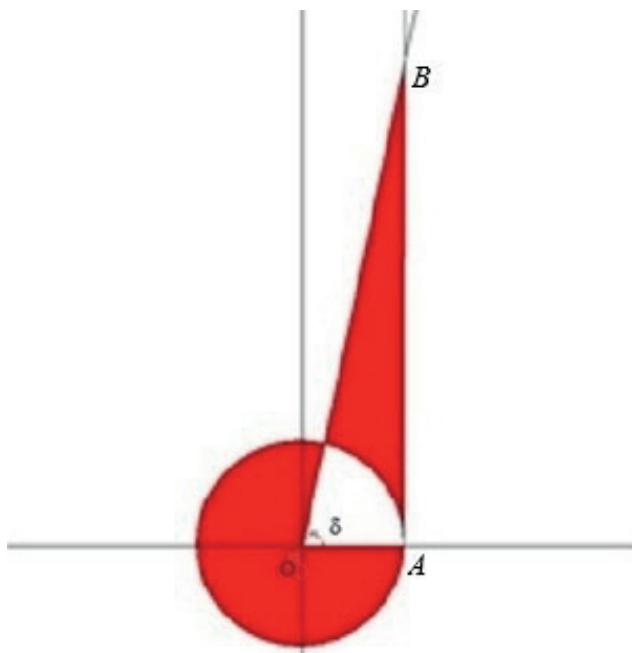


Figura 2.

Quanto visto per un cerchio può essere generalizzato a un qualunque settore circolare. Ci proponiamo quindi di disegnare uno degli infiniti triangoli equivalenti a un settore circolare di un cerchio. Consideriamo, nuovamente il cerchio C di centro nell'origine del riferimento e raggio r , sia A il punto d'intersezione della circonferenza col semiasse positivo delle x ; sulla semiretta passante per A , nel semipiano positivo delle y , determiniamo un punto B' in modo tale che la lunghezza del segmento AB' sia uguale a $(2\pi r)/m$ (con $m \geq 1$); ovviamente per $m=1$ avremo il caso analizzato precedentemente di un settore circolare coincidente con l'intero cerchio).

Il triangolo $AB'O$ (di area $\pi \cdot r^2 / m$) sarà equivalente a un settore circolare S_{C_β} di angolo al centro $\beta = 2\pi / m$ che sottende un arco AB'' di lunghezza $\beta \cdot r = (2\pi / m) \cdot r$ uguale a $\overline{AB'}$.

Risulteranno pertanto anche equivalenti le regioni piane evidenziate nella figura seguente:

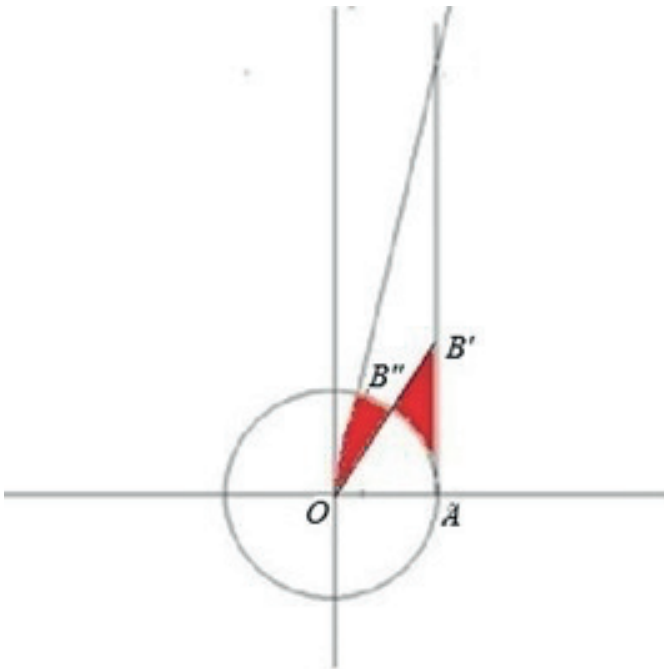


Figura 3.

Il secondo lato (OB'') del settore circolare sarà,

- se $m > 4$, interno al primo quadrante (come nella **Figura 3**);

- se $m = 4$, sul semiasse positivo dell'asse y ;
- se $2 < m < 4$, interno al secondo quadrante;
- se $m = 2$, sul semiasse negativo dell'asse x ;
- se $\frac{4}{3} < m < 2$, interno al terzo quadrante;
- se $m = \frac{4}{3}$, sul semiasse negativo dell'asse y ;
- se $1 < m < \frac{4}{3}$, interno al quarto quadrante;
- se $m = 1$, sul semiasse positivo dell'asse x (come nella **Figura 2**).

Se poniamo $\delta = A\hat{O}B'$ e $\beta = A\hat{O}B''$, sarà $\overline{AB'} = r \tan \delta$, uguale anche alla lunghezza $r\beta$ dell'arco AB'' , da cui sarà $\beta = \tan \delta$.

Un settore circolare di raggio r e ampiezza β è quindi equivalente a un triangolo rettangolo avente un cateto uguale a r e l'angolo acuto ad esso adiacente $\delta = \tan^{-1} \beta$ (per l'intero cerchio, come visto precedentemente, è $\beta = 2\pi$ e $\delta = \tan^{-1} 2\pi$).

A partire da un qualunque settore circolare che sottende un arco AB'' di primo estremo un punto A del semiasse positivo delle x , quindi, possiamo costruire il triangolo $AB'O$ ad esso equivalente considerando, sulla retta passante per A parallela all'asse y , nel primo quadrante, un punto B' tale che $\overline{AB'}$ sia uguale alla lunghezza dell'arco sotteso dal settore circolare e quindi considerando la semiretta OB' tale che $A\hat{O}B' = \tan^{-1} \beta$ (ovviamente, in generale, tutti gli infiniti triangoli, aventi un

lato di lunghezza uguale a quella dell'arco sotteso dal settore circolare e altezza relativa a tale lato uguale al suo raggio, saranno equivalenti a tale settore).

4. Equivalenza tra la superficie di in poligono regolare esterna al cerchio in esso inscritto e un settore circolare

Consideriamo un poligono regolare P_n circoscritto al cerchio C di raggio r :

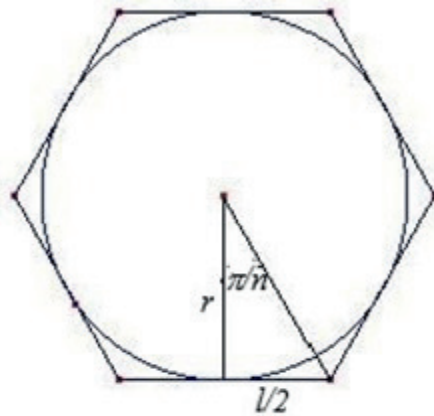


Figura 4.

Sarà

$$\frac{l}{2} = r \cdot \tan \frac{\pi}{n} \quad \text{da cui} \quad \text{Perimetro}(P_n) = 2n \cdot r \cdot \tan \frac{\pi}{n}$$

e

$$\text{Area}(P_n) = n \cdot r^2 \tan \frac{\pi}{n}.$$

Di seguito diamo una dimostrazione del limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1$$

diversa da quella che generalmente si trova sui testi scolastici di matematica.

Dato che, al tendere di n a infinito il poligono P_n tende al cerchio, sar :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Perimetro}(P_n) = 2\pi r$$

e quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2nr \tan \frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2nr \frac{\text{sen} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2nr \cdot \frac{\pi}{n} \frac{\text{sen} \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2r \cdot \pi \frac{\text{sen} \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} = 2\pi r.$$

Da ci , posto $x = \frac{\pi}{n}$, dovr  essere

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1.$$

La parte di P_n esterna al cerchio ha area:

$$Area(P_n) - Area(C) = nr^2 \tan \frac{\pi}{n} - \pi \cdot r^2$$

e, per quanto visto alla fine del paragrafo precedente, sarà uguale all'area di un settore circolare (somma di $2n$ settori circolari uguali del cerchio inscritto nel poligono) di ampiezza γ tale che:

$$nr^2 \tan \frac{\pi}{n} - \pi \cdot r^2 = \frac{\gamma \cdot r^2}{2}$$

da cui:

$$\gamma = 2n \left(\tan \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \right) = 2n \tan \frac{\pi}{n} - 2\pi .$$

Per esempio, se consideriamo un esagono regolare circoscritto a un cerchio di raggio r , la parte di poligono esterna al cerchio sarà equivalente a un settore circolare di raggio r e ampiezza:

$$\gamma = 2 \cdot 6 \cdot \left(\tan \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) = 12 \tan \frac{\pi}{6} - 2\pi = 2(2\sqrt{3} - \pi) \cong 36^\circ 57' 24'' .$$

Tale settore circolare è equivalente, per quanto visto, a un triangolo rettangolo avente un cateto uguale a r e l'angolo acuto ad esso adiacente di ampiezza

$$\tan^{-1} \left(2n \left(\tan \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \right) \right) = \tan^{-1} \left(2n \tan \frac{\pi}{n} - 2\pi \right) .$$

Quindi ogni poligono regolare P_n è equivalente al cerchio in esso inscrivibile, di raggio il suo apotema, più un suo settore circolare di angolo al centro di ampiezza

$$\gamma = 2n \left(\tan \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \right).$$

5. Definizione di apotema di un poliedro e equivalenza tra un poliedro e un tetraedro

Analogamente a quanto accade nel piano per i poligoni, ogni poliedro di n facce, regolare o no, che possa essere circoscritto a una sfera di raggio r , può essere pensato come l'unione di n piramidi tutte di altezza r , aventi come basi le facce del poliedro e vertice il centro della sfera, risultando pertanto equivalente a una piramide di base un poligono di area pari alla superficie del poliedro e altezza r .

Come per la definizione di apotema di un poligono generico data nel primo paragrafo, possiamo allora definire apotema di un poliedro generico l'altezza di una delle infinite piramidi aventi area di base pari alla superficie del poliedro, equivalenti al poliedro stesso (nel caso di un poliedro circoscrittibile a una sfera, esso coincide con il raggio della sfera).

Considerato un poliedro generico di n facce, esso può essere diviso in n piramidi aventi come basi le facce di aree S_i del poliedro e come altezze le distanze h_i di un qualunque punto interno al poliedro dai piani di ognuna di tali facce. L'apotema del poliedro sarà:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n S_i h_i}{\sum_{i=1}^n S_i} = \frac{3 \cdot \text{Volume}(\text{Poliedro}_n)}{\text{Superficie}(\text{Poliedro}_n)}.$$

Tale poliedro è quindi equivalente a una piramide con base di area pari a quella della superficie del poliedro (per esempio una piramide con base quadrata di lato $\sqrt{\sum_{i=1}^n S_i}$) e altezza a .

Il poligono base della piramide è equivalente a un triangolo avente come base il suo perimetro e come altezza a_b il suo apotema (quindi con $\text{Area}(\text{base}) = \frac{a_b \cdot \text{Perimetro}(\text{base})}{2}$).

Pertanto il poliedro è equivalente a un tetraedro avente una delle facce equivalente alla superficie del poliedro e relativa altezza uguale ad a .

Definiamo apotema di un generico poliedro l'altezza degli infiniti tetraedri equivalenti al poliedro, aventi la base di area uguale a quella della superficie del poliedro.

(se il poliedro è regolare, o se comunque è possibile inscrivere in esso una sfera, l'apotema del poligono, come detto, coincide con il raggio della sfera in esso inscritta).

6. Definizione di apotema di un cono, di un cilindro, di una sfera e equivalenza tra ognuna di tali figure geometriche e un tetraedro

Cono

Considerato un cono di raggio di base r e altezza h , come per i poliedri, definiamo il suo apotema come l'altezza di uno qualunque degli infiniti tetraedri equivalente ad esso, aventi come base un triangolo di area uguale a quella della superficie del cono (prima di individuare uno di tali tetraedri, passeremo per un cono equivalente al cono di partenza, di area di base uguale a quella della sua superficie e altezza uguale al suo apotema). Sarà quindi:

$$a = \frac{3 \cdot \text{Volume}(\text{Cono})}{\text{Superficie}(\text{Cono})} = \frac{3 \cdot \frac{\pi \cdot r^2 h}{3}}{\pi \cdot r^2 + \frac{2\pi r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}}{2}} = \frac{r \cdot h}{r + \sqrt{r^2 + h^2}} \quad (1).$$

Si verifica facilmente che l'apotema, così calcolato, coincide con il raggio r_s della sfera inscritta nel cono (come per tutti i poliedri nei quali è possibile inscrivere una sfera):

$$a = r_s = \frac{r \cdot h}{r + \sqrt{r^2 + h^2}}.$$

($\sqrt{r^2 + h^2}$ rappresenta l'apotema del cono, come viene comunemente definito).

Quindi, dalla relazione (1), possiamo dedurre che il cono di partenza è equivalente a un altro cono con area di base $\pi r^2 + \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi (\sqrt{r^2 + r \sqrt{r^2 + h^2}})^2$ uguale all'area della superficie del cono di partenza (e cioè all'area di un cerchio di raggio $\sqrt{r^2 + r \sqrt{r^2 + h^2}}$) e altezza uguale all'apotema del cono di partenza.

Il cono così ottenuto, per quanto visto in precedenza, è equivalente a un tetraedro avente una faccia con un lato uguale a $2\pi \sqrt{r^2 + r \sqrt{r^2 + h^2}}$ e relativa altezza uguale a $\sqrt{r^2 + r \sqrt{r^2 + h^2}}$.

Pertanto il cono di partenza, come da definizione data del suo apotema, è equivalente a un tetraedro avente una faccia di area uguale a quella della superficie del cono e altezza relativa ad essa uguale all'apotema del cono.

Cilindro

In un cilindro di raggio r e altezza h , è possibile inscrivere una sfera (di raggio $r_s=r$) $\Leftrightarrow h = 2r$. In tal caso il cilindro è regolare e si definisce ancora il suo apotema come il raggio della sfera in esso inscritta. Quindi, per un cilindro regolare, il suo apotema sarà:

$$a = r_s = r.$$

In tal caso sarà anche:

$$\frac{3 \cdot \text{Volume}(\text{Cilindro})}{\text{Superficie}(\text{Cilindro})} = \frac{3\pi \cdot r^2 h}{2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot rh} = r$$

e quindi, anche per un cilindro regolare, sarà:

$$a = \frac{3 \cdot \text{Volume}(\text{Cilindro})}{\text{Superficie}(\text{Cilindro})}.$$

In generale, definiamo apotema di un cilindro, come per i poliedri e per il cono, l'altezza di uno qualunque degli infiniti tetraedri equivalenti al cilindro, aventi come base un triangolo di area uguale alla superficie del cilindro (come per il cono, prima di individuare uno di tali tetraedri, passeremo per un cono equivalente al cilindro, di altezza uguale al suo apotema):

$$a = \frac{3 \cdot \text{Volume}(\text{Cilindro})}{\text{Superficie}(\text{Cilindro})} = \frac{3\pi \cdot r^2 h}{(2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot rh)} = \frac{3rh}{2(r+h)} \quad (2)$$

(nel caso in cui il cilindro sia regolare, avremo ovviamente di nuovo, come visto precedentemente, che l'apotema del cilindro sarà uguale al suo raggio).

Quindi, dalla relazione (2), possiamo dedurre che il cilindro è equivalente a un cono con area di base $2\pi r^2 + 2\pi rh = \pi(2r^2 + 2rh) = \pi(\sqrt{2r(r+h)})^2$ uguale all'area della superficie del cilindro (e cioè all'area di un cerchio di raggio $\sqrt{2r(r+h)}$) e altezza uguale all'apotema del cilindro.

Il cono così ottenuto, per quanto visto in precedenza, è equivalente a un tetraedro avente una faccia con un lato uguale a $2\pi\sqrt{2r(r+h)}$ e relativa altezza uguale a $\sqrt{2r(r+h)}$.

Pertanto il cilindro, come da definizione data del suo apotema, è equivalente a un tetraedro avente una faccia di area uguale a quella della superficie del cilindro e altezza relativa ad essa uguale all'apotema del cilindro.

Sfera

Dato un poliedro di n facce circoscritto a una sfera di raggio r (per il quale sarà, come visto in precedenza, il suo apotema $a=r$), al tendere di n a infinito, tale poliedro tende alla sfera; anche in tale situazione limite, si riscontra l'equivalenza tra la sfera e uno qualunque degli infiniti tetraedri aventi una faccia equivalente alla superficie sferica e altezza r .

Infatti una sfera di raggio r è equivalente a un cono di raggio di base pari al doppio $2r$ del raggio della sfera e altezza uguale al raggio r della sfera:

$$Volume(Cono) = \frac{\pi \cdot (2r)^2 r}{3} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 = Volume(Sfera)$$

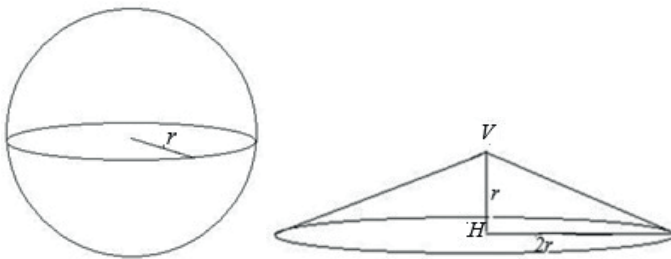


Figura 5.

La base del cono, come ogni cerchio, è equivalente a un triangolo avente un lato uguale alla circonferenza (in questo caso $2\pi(2r)$) e relativa altezza il raggio (in questo caso $2r$).

Pertanto il cono, e quindi anche la sfera, è equivalente a un tetraedro, avente una delle facce (nella figura che segue, la faccia ABC) equivalente alla base del cono e relativa altezza VH uguale a r :

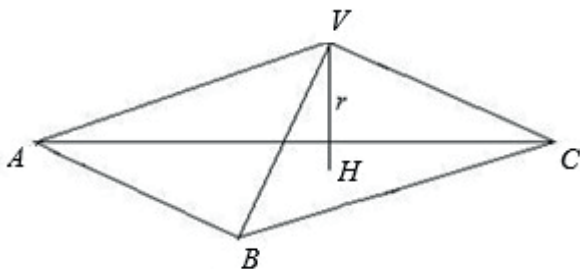


Figura 6.

Da quanto visto in questo paragrafo e nel precedente, possiamo in generale dire che il volume di un qualunque poliedro, di un cono, di un cilindro o di una sfera è:

$$\text{volume (poliedro, cono, cilindro, sfera)} = \text{misura del contorno (superficie) } \times \text{apotema} / 3$$

(il raggio della sfera può essere considerato l'apotema di un poliedro circoscritto alla sfera, identificabile con la sfera stessa, avente infinite facce di area infinitesima).

7. Definizione generale di apotema di una figura geometrica convessa

Da quanto visto nei paragrafi precedenti, possiamo in generale definire come segue, in uno spazio di dimensione n (con $n=2$ nel piano e con $n=3$ nello spazio tridimensionale), l'apotema di una figura geometrica convessa F :

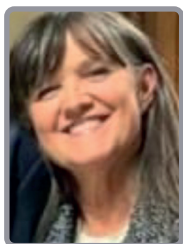
$$\text{apotema di } F = n \times (\text{misura della parte di spazio occupato da } F) / (\text{misura del contorno di } F)$$

e quindi:

$$\text{misura della parte di spazio occupato da } F = (\text{misura del contorno di } F) \times (\text{apotema di } F) / n.$$

LA DEFINIZIONE DI APOTEMA E L'EQUIVALENZA DI FIGURE GEOMETRICHE NEL PIANO E NELLO SPAZIO

In questo breve testo si introduce una definizione di apotema di una figura geometrica nel piano e nello spazio, diversa dalle definizioni note di apotema di un poligono regolare nel piano e di un cono o di una piramide nello spazio, strettamente collegata all'equivalenza tra figure piane e triangoli e tra figure solide e tetraedri. Nel piano si dà una definizione di apotema, che si ottiene a partire dalla definizione nota di apotema di un poligono regolare, valida per poligoni convessi generici e per il cerchio (dopo aver descritto come costruire un triangolo equivalente a un cerchio, si descrive anche, in generale, come costruire un triangolo equivalente a un settore circolare, e da ciò si dimostra che la parte di un poligono regolare esterna al cerchio in esso inscritto è equivalente a un settore circolare e quindi a infiniti triangoli). Nello spazio, invece, si dà una definizione completamente diversa da quella nota di apotema di un cono o di una piramide, analoga alla definizione data nel piano, valida per poliedri convessi generici, per il cilindro, per il cono e per la sfera. Infine si dà una definizione di apotema unica, anche se formalmente non rigorosa, valida sia nel piano che nello spazio.



CARMEN CARANO

Nata a Campobasso nel 1958, si è laureata con lode in Matematica presso l'Università degli Studi di Napoli Federico II nel 1981; ha insegnato Matematica i primi anni presso l'Istituto Suor Orsola Benincasa di Napoli, successivamente presso il Liceo Scientifico di Santa Croce di Magliano e poi, fino alla pensione a settembre del 2019, presso l'Istituto Tecnico Industriale Guglielmo Marconi di Campobasso. Ha pubblicato, sul «Periodico di Matematiche» della Mathesis, gli articoli: *Una spirale logaritmica aurea* (2004), *La successione di Fibonacci, il numero aureo, la spirale logaritmica aurea* (2005), *Spirali logaritmiche tridimensionali* (2006), *Sulle serie armoniche generalizzate* (2008), *Sulle serie alternate* (2009) (pubblicati nuovamente nel 2017, in open access, da Ledizioni) e, con Aracne editrice, i testi: *Logaritmi e potenze nell'insieme dei numeri complessi* (2018), *Sulle funzioni iperboliche* (2019), *Sul principio di Hankel nell'insieme dei numeri complessi e altri articoli* (2021) (che contiene anche gli articoli pubblicati tra il 2004 e il 2009 sul «Periodico di Matematiche») e *I quaternioni e in generale gli ipercomplessi partendo dalla formula di Cayley–Dickson* (2025).



ISBN 979-12-218-2673-9



9 791221 826739

