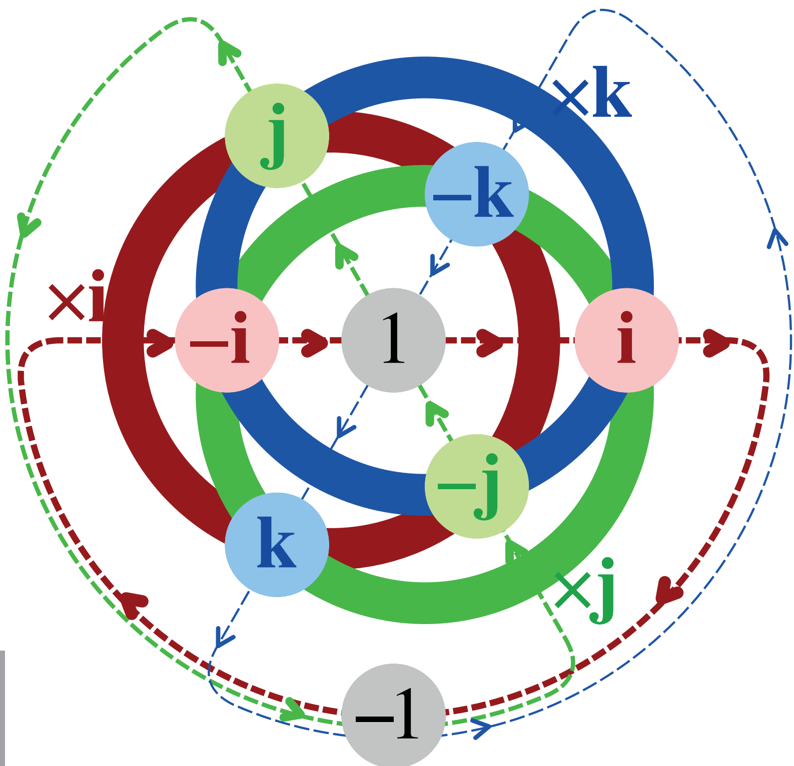
CARMEN **CARANO**

# I QUATERNIONI E IN GENERALE GLI IPERCOMPLESSI PARTENDO DALLA FORMULA DI CAYLEY–DICKSON




aracne

aracne

*Classificazione Decimale Dewey:*

512.02 (23.) ALGEBRA ASTRATTA

CARMEN CARANO

# I QUATERNIONI E IN GENERALE GLI IPERCOMPLESSI PARTENDO DALLA FORMULA DI CAYLEY-DICKSON

aracne

ISBN
979–12–218–1891–8

PRIMA EDIZIONE
**ROMA** 18 LUGLIO 2025

*Ai miei genitori,*
*Corrado e Maria*

# INDICE

9 *Sunto*

13 1. Gli insiemi ipercomplessi a partire dalla formula di Cayley-Dickson

29 2. I quaternioni e in generale gli ipercomplessi

33 3. Le operazioni fondamentali tra quaternioni immaginari e in generale tra ipercomplessi immaginari

3.1. Somma, 33 – 3.2. Differenza, 35 – 3.3. Prodotto, 37 – 3.4. Quoziente, 45.

49 4. Le operazioni fondamentali tra quaternioni e in generale tra ipercomplessi

4.1. Somma, 49 – 4.2. Differenza, 50 – 4.3. Prodotto, 50 – 4.4. Quoziente, 54 – 4.5. Osservazioni sull’elemento neutro del prodotto e, in generale, sul prodotto di frazioni, 55.

59 5. Costruzione degli ampliamenti numerici

63 6. Rappresentazione dell'insieme dei quaternioni in infiniti piani di Gauss (esclusi i punti degli assi reali) e in un asse reale

75 7. Rappresentazione di un qualunque insieme ipercomplesso in infiniti piani di Gauss (esclusi i punti degli assi reali) e in un asse reale

# SUNTO

*In questo lavoro si dà una visione unitaria degli insiemi numerici successivi all'insieme dei numeri reali: si introducono gli elementi degli insiemi ipercomplessi partendo dall'assunto che essi siano definiti in modo analogo ai numeri complessi, utilizzando quindi, per la loro costruzione, la formula di Cayley-Dickson e ottenendo così una serie di relazioni tra essi, tra le quali ritroviamo anche la definizione hamiltoniana dei quaternioni e quanto noto, in generale, sulle algebre ipercomplesse.*

*Si analizzano poi le quattro operazioni fondamentali partendo dall'insieme dei quaternioni: prima si considerano le operazioni tra quaternioni immaginari, e quindi tra i vettori identificabili con essi, e da ciò si arriva alla definizione del prodotto e del quoziente di due vettori; si evidenzia inoltre come la formula del prodotto di quaternioni immaginari (e quindi dei vettori identificabili con essi) permetta di superare l'apparente mancanza di coerenza tra il*

*prodotto di due unità immaginarie uguali e quello di due unità immaginarie diverse; si considerano poi le operazioni tra quaternioni generici e ci si sofferma su alcune apparenti contraddizioni sull'elemento neutro del prodotto di quaternioni e in generale sul prodotto di due frazioni. Di volta in volta, si generalizzano i risultati ottenuti nell'insieme dei quaternioni a qualunque insieme ipercomplesso (e ai vettori identificabili con gli ipercomplessi immaginari).*

*Si affronta poi la questione della non validità, a partire dall'insieme dei quaternioni, del principio di Hankel di permanenza delle proprietà formali, in base alla quale non potremmo pensare agli insiemi ipercomplessi come ampliamenti dei precedenti insiemi numerici; si introducono quindi, in sostituzione di tale principio, nuovi criteri per la costruzione degli ampliamenti numerici, in base ai quali ogni insieme ipercomplesso può essere considerato ancora un ampliamento dei precedenti insiemi numerici.*

*Partendo dai quaternioni e poi generalizzando a ogni insieme ipercomplesso, si vede infine come in ognuno di tali insiemi può essere definita una relazione di equivalenza che permette di individuare una sua partizione in infinite classi di cui una identificabile con l'insieme reale, e quindi rappresentabile in un asse reale e le altre, costituite da ipercomplessi con parte immaginaria non nulla, ognuna delle* *quali rappresentabile in un piano di Gauss, esclusi i punti del suo asse reale. Ogni insieme ipercomplesso quindi può essere considerato come unione di infiniti suoi sottoinsiemi disgiunti: nel sottinsieme dei quaternioni con parte immaginaria nulla continueranno ovviamente a valere le stesse proprietà formali valide nell'insieme dei reali, in ognuno degli altri sottoinsiemi della partizione varranno le stesse proprietà formali valide nell'insieme dei numeri complessi e pertanto si potrà operare come si opera in tale insieme.*

# 1. GLI INSIEMI IPERCOMPLESSI A PARTIRE DALLA FORMULA DI CAYLEY-DICKSON

La formula di Cayley-Dickson generalizza il modo in cui si definiscono i complessi a partire dai reali e definisce quindi ricorsivamente (se si estende opportunamente, come vedremo, il significato rigoroso di funzione ricorsiva) gli elementi degli insiemi numerici via via successivi.

In quanto segue, costruiremo gli elementi degli insiemi successivi all'insieme dei numeri complessi come gli oggetti che si ottengono in modo analogo a quello con cui si ottengono i numeri complessi e quindi a partire da due elementi dell'insieme immediatamente precedente e una unità immaginaria non presente in esso.

Le unità immaginarie via via introdotte, come l'unità immaginaria presente nei complessi, sono oggetti definiti dall'essere il loro quadrato uguale a –1; sono però anche identificabili, come vedremo, e sempre come nell'insieme complesso, con grandezze vettoriali, versori di assi immaginari; unità immaginarie diverse rappresentano versori di assi immaginari differenti e quindi sono vettori con direzioni differenti.

Gli insiemi ottenuti sono detti ipercomplessi perché nei loro elementi sono presenti più unità immaginarie. Gli elementi degli insiemi ipercomplessi sono quindi, come gli elementi dell'insieme complesso, oggetti (che chiameremo ancora numeri) formati dalla somma di una parte reale (o parte scalare) e una parte immaginaria (o parte vettoriale).

Vedremo in seguito come, in base alla definizione data, negli elementi di ognuno degli insiemi successivi all'insieme dei numeri reali saranno presenti, $\forall n \in N - \{0\}$, $2^n - 1$ unità immaginarie (per distinguere tali unità immaginarie, quella presente nei numeri complessi sarà indicata con $i_1$ e, in generale, le unità immaginarie presenti negli elementi degli insiemi successivi all'insieme dei numeri reali saranno indicate con $i_h$, con $h \in N - \{0\}$).

Consideriamo ora il prodotto di due generiche unità immaginarie diverse (dalla definizione di unità immaginaria, il prodotto di due unità immaginarie uguali è $-1$), quindi appartenenti a un insieme successivo a quello dei numeri complessi, nel quale abbiamo una sola unità immaginaria, che abbiamo indicato con $i_1$.

Sicuramente, $\forall h \neq k$, risulta:

1) $i_h \cdot i_k \neq m$ con $m \in R$

perché in caso contrario sarebbe $-i_h \neq m \cdot i_k$ e quindi $i_h$ e $i_k$ avrebbero la stessa direzione, incompatibilmente col fatto che sono versori di assi immaginari diversi;

2) $i_h \cdot i_k \neq i_h$ e $i_h \cdot i_k \neq i_k$

perché in tal caso sarebbe rispettivamente $i_k = 1$ o $i_h = 1$, cioè unità reali, incompatibilmente con fatto che sono invece unità immaginarie.

Dovrà pertanto necessariamente essere $i_h \cdot i_k = i_m$ con $i_m$ unità immaginaria diversa da $i_h$ e da $i_k$.

Da $i_h \cdot i_k = i_m$, e quindi da $i_h \cdot i_k \cdot i_m = -1$, si deduce facilmente che $i_h \cdot i_k = -i_k \cdot i_h$, cioè che il prodotto di due unità immaginarie diverse è anticommutativo (e pertanto, a partire dall'insieme dei quaternioni, non è più verificata la proprietà commutativa del prodotto) e che $i_k \cdot i_m = i_h$ e $i_m \cdot i_h = i_k$, cioè che tale prodotto risulta ciclico (e questo ci permette di affermare che il prodotto in un insieme ipercomplesso è un'operazione interna ad esso).

Inoltre, dalle relazioni

$$i_h^{\ 2} = -1 \quad \text{(definizione di unità immaginaria)}$$

e

$$i_h \cdot i_k = -i_k \cdot i_h \quad \forall h \neq k \quad \text{(come visto precedentemente),}$$

si ha

$$i_h \cdot i_h \cdot i_h = -i_h \qquad \text{e} \qquad i_h \cdot i_k \cdot i_h = i_k \quad \forall h \neq k$$

cioè

$$i_h \cdot i_k \cdot i_h = -i_k \quad \forall h = k \qquad \text{e} \qquad i_h \cdot i_k \cdot i_h = i_k \quad \forall h \neq k \, .$$

Dalla relazione $i_h \cdot i_k = -i_k \cdot i_h \quad \forall h,k \in N - \{0\}$ con $h \neq k$ si ha ovviamente che il quadrato di un ipercomplesso immaginario (avente cioè parte scalare nulla) è uguale alla somma dei quadrati dei suoi termini.

Di seguito verifichiamo che, come detto, negli elementi di ognuno degli insiemi successivi all'insieme dei numeri reali saranno presenti, $\forall n \in N - \{0\}$, $2^n - 1$ unità immaginarie.

Un generico elemento dell'insieme complesso è $a_0 + a_1 i_1$ con $a_0, a_1 \in R$; in esso è presente $2^1 - 1 = 1$ unità immaginaria.

Un generico elemento dell'insieme immediatamente successivo a quello dei numeri complessi (insieme dei quaternioni) è, mediante la formula di Cayley-Dickson, $c'_1 + c''_1 i_2$ con $c'_1, c''_1 \in C_1$.

Se $c'_1 = a_0 + a_1 i_1$ e $c''_1 = a_2 + a_3 i_1$ con $a_0, a_1, a_2, a_3 \in R$, avremo quindi

$$c'_1 + c''_1 i_2 = a_0 + a_1 i_1 + (a_2 + a_3 i_1) i_2 = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_1 i_2;$$

bisognerà calcolare il prodotto $i_1 i_2$: come visto, tale prodotto deve essere uguale a una unità immaginaria, diversa da $i_1$ e $i_2$, quindi a una nuova unità immaginaria che pertanto indicheremo con $i_3$; sarà quindi $i_1 i_2 = i_3$ da cui possiamo affermare che nel generico elemento dell'insieme dei quaternioni sono presenti $2^2 - 1 = 3$ unità immaginarie.

Il generico quaternione sarà dato pertanto, in forma polinomiale, da

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 = a_0 + \sum_{h=1}^{3} a_h i_h \quad \text{con} \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \in R.$$

Analogamente a quanto visto per i quaternioni, un generico elemento dell'insieme immediatamente successivo a quello dei quaternioni (insieme degli ottonioni) è, mediante la formula di Cayley-Dickson, $c'_3 + c''_3\, i_4$ con $c'_3, c''_3 \in C_3$.

Se $c'_3 = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$ e $c''_3 = a_4 + a_5 i_1 + a_6 i_2 + a_7 i_3$ con $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \in R$, avremo quindi

$$c'_3 + c''_3\, i_4 = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + (a_4 + a_5 i_1 + a_6 i_2 + a_7 i_3) i_4;$$

bisognerà calcolare i prodotti $i_1 i_4$, $i_2 i_4$ e $i_3 i_4$: come visto, ognuno di tali prodotti dovrà essere uguale a una unità immaginaria rispettivamente diversa da $i_1$ e $i_4$, da $i_2$ e $i_4$, da $i_3$ e $i_4$; in generale, verifichiamo che non potrà essere $i_h i_4 = i_m$ con $m = 1,2,3,...h+4-1$.

Infatti, se fosse $i_1 i_4 = i_2$, sarebbe $-i_4 = i_1 i_2 = i_3$ e se fosse $i_1 i_4 = i_3$, sarebbe $-i_4 = i_1 i_3 = -i_2$, risultati entrambi incompatibili con l'essere unità immaginarie diverse identificabili con vettori di direzioni diverse; questo significa che $i_1 i_4$ dovrà essere necessariamente una nuova unità immaginaria, diversa da $i_1, i_2, i_3, i_4$ e quindi $i_1 i_4 = i_5$; passando al prodotto $i_2 i_4$, in modo analogo si verifica che non potrà essere uguale a nessuna delle unità immaginarie $i_n$ con $n = 1,2,3,4$, ma non potrà neanche essere $i_2 i_4 = i_5$ perché sarebbe $i_2 i_4 = i_1 i_4$ e quindi $i_2 = i_1$ da cui sarà $i_2 i_4 = i_6$; analogamente si verifica che dovrà essere $i_3 i_4 = i_7$; sarà pertanto, $\forall h = 1,2,3$, $i_h i_4 = i_{h+4}$ da cui possiamo affermare che nel generico elemento dell'insieme degli ottonioni sono presenti $2^3 - 1 = 7$ unità immaginarie.

Il generico ottonione sarà dato pertanto, in forma polinomiale, da

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7 = a_0 + \sum_{h=1}^{7} a_h i_h \quad con \quad a_0, a_1, .. a_7 \in R.$$

Allo stesso modo si verifica che nei sedenioni sono presenti $2^4 - 1 = 15$ unità immaginarie e così via…..

In generale, quindi, come avevamo anticipato, negli elementi di ognuno degli insiemi successivi all'insieme dei numeri reali saranno presenti, $\forall n \in N - \{0\}$, $2^n - 1$ unità immaginarie.

A questo punto potremo definire tutti gli insiemi successivi all'insieme dei numeri reali (evitando di distinguere complessi e ipercomplessi) come complessi con $2^n - 1$ unità immaginarie e l'insieme dei reali, ultimo insieme rappresentabile su una retta, anche come un insieme complesso con $0$ ($2^n - 1$ con $n = 0$) unità immaginarie.

Nella formula $c_{2^n-1} = c'_{2^{n-1}-1} + c''_{2^{n-1}-1}\, i_{2^{n-1}} \in C_{2^n-1}$, $\forall n \in N - \{0\}$, i prodotti tra le unità immaginarie $i_1, i_2 .... i_{2^{n-1}-1}$ e $i_{2^{n-1}}$ si otterranno dalle relazioni:

$$i_h i_{2^{n-1}} = i_{2^{n-1}+h} \qquad \forall h = 1,2,...2^{n-1} - 1.$$

Il generico elemento dell'insieme $C_{2^n-1}$ sarà dato pertanto, in forma polinomiale, da

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + ... + a_{2^n-1} i_{2^n-1} = a_0 + \sum_{h=1}^{2^n-1} a_h i_h \quad \text{con} \quad a_0, a_1, .. a_{2^n-1} \in R$$

in cui $a_0$ è la parte reale e $\sum_{h=1}^{2^n-1} a_h i_h$ è la parte immaginaria.

Com'è noto, negli insiemi successivi all'insieme $C_3$ dei quaternioni, si perdono man mano altre proprietà valide negli insiemi precedenti; da quanto visto precedentemente, si verifica facilmente per esempio che, nell'insieme $C_7$ degli ottonioni, non è più valida neanche la proprietà associativa del prodotto: infatti, per esempio, essendo $i_3 \cdot i_6 = (i_1 \cdot i_2) \cdot (i_2 \cdot i_4)$, se questa fosse valida, risulterebbe $i_3 \cdot i_6 = i_1 \cdot (i_2 \cdot i_2) \cdot i_4 = -i_5$, ma sarebbe anche

$i_6 \cdot i_3 = i_2 \cdot (i_4 \cdot i_1) \cdot i_2 = i_2 \cdot (-i_5) \cdot i_2 = i_5 \cdot i_2 \cdot i_2 = -i_5$, incompatibilmente con l'essere $i_3 \cdot i_6 = -i_6 \cdot i_3$ (ciò non si verifica invece nel prodotto delle uniche 3 unità immaginarie $i_1$, $i_2$ e $i_3$ dell'insieme $C_3$, in cui il prodotto continua a essere associativo).

Dalla relazione

$$i_h i_{2^{n-1}} = i_{2^{n-1}+h} \qquad \forall h = 1,2,\ldots 2^{n-1}-1 \text{ con } n \in N - \{0\},$$

da cui ovviamente

$$i_h i_{2^{n-1}} i_{2^{n-1}+h} = -1 \quad \forall h = 1,2,\ldots 2^{n-1}-1 \text{ con } n \in N - \{0\},$$

si ha (come già visto d'altronde per tutti i prodotti di due generiche unità immaginarie diverse):

- $i_h i_{2^{n-1}} = -i_{2^{n-1}} i_h$ cioè tale prodotto è anticommutativo;
- $i_h i_{2^{n-1}} = i_{2^{n-1}+h}$, $i_{2^{n-1}} i_{2^{n-1}+h} = i_h$, $i_{2^{n-1}+h} i_h = i_{2^{n-1}}$ cioè tali prodotti sono ciclici.

D'ora in poi, quindi, $\forall n \in N$, indicheremo con $C_{2^n-1}$ l'insieme dei numeri con $2^n - 1$ unità immaginarie e indicheremo pertanto l'insieme $R$ dei numeri reali con $C_0$, l'insieme $C$ dei numeri complessi con $C_1$, l'insieme $H$ dei quaternioni con $C_3$, l'insieme $O$ degli ottonioni con $C_7$, l'insieme $S$ dei sedenioni con $C_{15}$.

Come già detto, partendo dall'insieme $C_0$ dei numeri reali, si ottengono come segue gli elementi dei successivi insiemi numerici:

$$\begin{array}{ll} c_1 = c'_0 + c''_0\, i_1 \in C_1 & \forall c'_0, c''_0 \in C_0 \\ c_3 = c'_1 + c''_1\, i_2 \in C_3 & \forall c'_1, c''_1 \in C_1 \\ c_7 = c'_3 + c''_3\, i_4 \in C_7 & \forall c'_3, c''_3 \in C_3 \\ c_{15} = c'_7 + c''_7\, i_8 \in C_{15} & \forall c'_7, c''_7 \in C_7 \end{array}$$

e così via.

In generale, quindi, a partire dagli elementi dell'insieme $C_{2^{n-1}-1}$, si ottengono quelli dell'insieme $C_{2^n-1}$ dalla formula:

$$c_{2^n-1} = c'_{2^{n-1}-1} + c''_{2^{n-1}-1}\, i_{2^{n-1}} \in C_{2^n-1} \tag{1}$$

con

$$c'_{2^{n-1}-1}, c''_{2^{n-1}-1} \in C_{2^{n-1}-1} \qquad \forall n \in N - \{0\}.$$

Per ogni $n \in N - \{0\}$, a partire quindi da una coppia di elementi di $C_{2^{n-1}-1}$, si ottiene un elemento di $C_{2^n-1}$: a partire dagli $\infty^1$ elementi di $C_0$, e quindi dalle $(\infty^1)^2 = \infty^2$ coppie di elementi di $C_0$, si otterranno gli $\infty^2$ elementi di $C_1$, a partire dagli $\infty^2$ elementi di $C_1$, e quindi dalle $(\infty^2)^2 = \infty^4$ coppie di elementi di $C_1$, si otterranno gli $\infty^4$ elementi di $C_3$, a partire dagli $\infty^4$ elementi di $C_3$, e quindi dalle $(\infty^4)^2 = \infty^8$ coppie di elementi di $C_3$, si otterranno gli $\infty^8$ elementi di $C_7$ e così via.

In generale, $\forall n \in N - \{0\}$, a partire da un insieme $C_{2^{n-1}-1}$ (di cardinalità $\infty^{2^{n-1}}$), la formula (1) rappresenta una legge che associa a ognuna delle $(\infty^{2^{n-1}})^2 = \infty^{2^n}$ coppie di elementi di $C_{2^{n-1}-1}$ un elemento dell'insieme immediatamente successivo $C_{2^n-1}$ (che avrà quindi cardinalità $\infty^{2^n}$, coerentemente con quanto si vede dalla rappresentazione polinomiale $a_0 + \sum_{h=1}^{2^n-1} a_h i_h$ degli elementi di $C_{2^n-1}$, ognuno dei quali dipende da una $2^n\_pla$ di numeri reali $(a_0, a_1, a_2, \dots . a_{2^n-1})$).

Come nell'insieme dei numeri complessi, anche negli insiemi dei numeri ipercomplessi, definiremo coniugato del generico elemento $c_{2^n-1} \in C_{2^n-1}$ con $n \in N - \{0\}$ l'elemento $\overline{c_{2^n-1}}$ avente rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria uguale e opposta a quella di $c_{2^n-1}$. Dato che, come abbiamo visto, risulta $\forall h \neq k \;\; i_h \cdot i_k = -i_k \cdot i_h$ (e poiché il prodotto di un numero reale per un'unità immaginaria è commutativo), sarà $c''_{2^{n-1}-1}\, i_{2^{n-1}} = i_{2^{n-1}}\, \overline{c''_{2^{n-1}-1}}$ e quindi la formula (1) potrà essere riscritta come segue:

$$c_{2^n-1} = c'_{2^{n-1}-1} + c''_{2^{n-1}-1}\, i_{2^{n-1}} = c'_{2^{n-1}-1} + i_{2^{n-1}}\, \overline{c''_{2^{n-1}-1}} \in C_{2^n-1}$$

con

$$c'_{2^{n-1}-1}, c''_{2^{n-1}-1} \in C_{2^{n-1}-1} \quad \forall n \in N - \{0\}.$$

Ovviamente, per $n=1$, e quindi nella costruzione mediante tale formula dei numeri complessi, sarà $c_1 = c'_0 + c''_0\, i_1 = c'_0 + i_1 \overline{c''_0} \in C_1$ con $c''_0 = \overline{c''_0}$ (dato che si tratta di due numeri reali) e quindi $c_1 = c'_0 + c''_0\, i_1 = c'_0 + i_1 c''_0 \in C_1$.

In senso lato, la formula

$$c_{2^n-1} = c'_{2^{n-1}-1} + c''_{2^{n-1}-1}\, i_{2^{n-1}} = c'_{2^{n-1}-1} + i_{2^{n-1}}\, \overline{c''_{2^{n-1}-1}} \in C_{2^n-1}$$

con

$$c'_{2^{n-1}-1}, c''_{2^{n-1}-1} \in C_{2^{n-1}-1} \quad \forall n \in N - \{0\}$$

per la definizione degli elementi degli insiemi numerici successivi all'insieme dei reali può essere vista come una funzione ricorsiva che genera, richiamando sempre se stessa, per ogni valore di $n$ e per ogni coppia di elementi di $C_{2^{n-1}-1}$, un elemento dell'insieme immediatamente successivo $C_{2^n-1}$. Ovviamente l'elemento generato non è univocamente determinato, ma dipende dalla coppia scelta di elementi di $C_{2^{n-1}-1}$, quindi tale formula non produce una successione numerica, come avviene generalmente nelle funzioni ricorsive, ma una successione (che indicheremo con $(s_n)_{n\in N-\{0\}}$) di leggi di composizione degli elementi degli insiemi via via successivi che si ottengono, partendo da una coppia di numeri reali, per la costruzione del generico numero complesso.

Come detto, la funzione genera una successione $(s_n)_{n\in N-\{0\}}$, non numerica e non di insiemi, ma di leggi di composizione degli elementi di insiemi ($s_1$ sarà la legge di composizione degli elementi dell'insieme $C_1$ dei complessi, $s_2$ sarà la legge di composizione degli elementi dell'insieme $C_3$ dei quaternioni, $s_3$ sarà la legge di composizione degli elementi dell'insieme $C_7$ degli ottonioni, e così via…), così definita

$$s_n:\ c_{2^n-1} = c'_{2^{n-1}-1} + c''_{2^{n-1}-1}\, i_{2^{n-1}} = c'_{2^{n-1}-1} + i_{2^{n-1}}\, \overline{c''_{2^{n-1}-1}} \in C_{2^n-1}$$

con

$$c'_{2^{n-1}-1}, c''_{2^{n-1}-1} \in C_{2^{n-1}-1} \quad \forall n \in N - \{0\},$$

assumendo noto l'insieme $C_0 \equiv R$ dei numeri reali e quindi partendo dalla legge di composizione

$$s_0 : \ c_0 \in R,$$

che ci permette di ottenere la legge di composizione $s_1$ dei numeri complessi a partire dalla coppia di 2 numeri reali $(c'_0, c''_0)$ e cioè $(c'_{2^{n-1}-1}, c''_{2^{n-1}-1}) \in C_{2^{n-1}-1}$ per $n = 1$.

Essendo, come abbiamo visto, il prodotto $i_h i_{2^{n-1}} = i_{h+2^{n-1}}$ ($h = 1,2,\ldots 2^{n-1} - 1$) anticommutativo e ciclico, possiamo calcolare e rappresentare in tabella, per ogni insieme complesso $C_{2^n-1}$ (con $n \in N - \{0\}$), il prodotto tra 2 generiche unità immaginarie.

Di seguito, per alcuni insiemi $C_{2^n-1}$, rappresenteremo in tabella il prodotto delle unità immaginarie (internamente a ognuna di tali tabelle saranno riportati i prodotti delle unità immaginarie della prima riga della tabella per le unità immaginarie della prima colonna della tabella).

Ovviamente nella rappresentazione tabellare, se ci limitiamo alle prime 2 righe e 2 colonne, otteniamo la tabella del prodotto in $C_1$, se ci limitiamo alle prime 4 righe e 4 colonne, otteniamo la tabella del prodotto in $C_3$, se ci limitiamo alle prime 8 righe e 8 colonne, otteniamo la tabella del prodotto in $C_7$ e così via…; in generale se ci limitiamo alle prime $2^n$ righe e $2^n$ colonne, otteniamo la tabella del prodotto in $C_{2^n-1}$.

Di seguito riportiamo la tabella relativa all'insieme $C_7$ $(n=3)$ degli ottonioni: per i prodotti diversi da $i_h i_{2^{n-1}}$ con $h=1,2,...2^{n-1}-1$, per esempio per calcolare il prodotto $i_5 \cdot i_4$, dalla ciclicità e anticommutatività del prodotto $i_1 \cdot i_4 = i_5$, otteniamo $i_5 \cdot i_4 = -i_1$; per prodotti in cui nessuno dei 2 fattori è l'unità immaginaria $i_{2^{n-1}}$, sfruttiamo il fatto che, in ogni insieme $C_{2^n-1}$ (in questo caso $C_7$), il prodotto è un'operazione interna da cui, per esempio, $i_3 \cdot i_5$ dovrà essere necessariamente uguale a una delle unità $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7$:

se fosse $i_3 i_5 = i_1$, sarebbe $i_3 i_5 = -i_3 i_2$ e cioè $i_5 = -i_2$

se fosse $i_3 i_5 = i_2$, sarebbe $i_5 i_3 = -i_1 i_3$ e cioè $i_5 = -i_1$

…………

Si verifica che l'unica uguaglianza che non porta a una contraddizione tra le possibili $i_3 i_5 = i_h$ con $h = 1,2,\ldots..7$ è $i_3 i_5 = i_6$ $(i_3 i_5 = i_2 i_4,\ -i_2 i_1 i_5 = i_2 i_4,\ -i_1 i_5 = i_4)$.

### *Tabella del prodotto tra unità immaginarie in $C_7$*

*(ogni elemento interno alla tabella è $i_h \cdot i_k$ con $i_h$ e $i_k$ elementi rispettivamente della prima riga e della prima colonna)*

| $\cdot$ | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ | $i_4$ | $i_5$ | $i_6$ | $i_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i_1$ | $-1$ | $-i_3$ | $i_2$ | $-i_5$ | $i_4$ | $-i_7$ | $i_6$ |
| $i_2$ | $i_3$ | $-1$ | $-i_1$ | $-i_6$ | $i_7$ | $i_4$ | $-i_5$ |
| $i_3$ | $-i_2$ | $i_1$ | $-1$ | $-i_7$ | $-i_6$ | $i_5$ | $i_4$ |
| $i_4$ | $i_5$ | $i_6$ | $i_7$ | $-1$ | $-i_1$ | $-i_2$ | $-i_3$ |
| $i_5$ | $-i_4$ | $-i_7$ | $i_6$ | $i_1$ | $-1$ | $-i_3$ | $i_2$ |
| $i_6$ | $i_7$ | $-i_4$ | $-i_5$ | $i_2$ | $i_3$ | $-1$ | $-i_1$ |
| $i_7$ | $-i_6$ | $i_5$ | $-i_4$ | $i_3$ | $-i_2$ | $i_1$ | $-1$ |

D'ora in poi ci soffermeremo sull'insieme dei quaternioni, generalizzando poi quanto ottenuto a insiemi ipercomplessi qualsiasi.

# 2. I QUATERNIONI E IN GENERALE GLI IPERCOMPLESSI

Da quanto visto nel paragrafo precedente, dalla definizione data degli ipercomplessi, si ottiene la relazione $i_1 i_2 = i_3$ da cui, insieme all'essere $i_1$, $i_2$ e $i_3$ unità immaginarie e quindi $i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1$, si ottengono le stesse relazioni della definizione che Hamilton dà dei quaternioni:

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = i_1 i_2 i_3 = -1.$$

In ogni insieme ipercomplesso $C_{2^n-1}$, come già detto, il prodotto di due generiche unità immaginarie diverse è anticommutativo e ciclico ed è valida la relazione $i_h i_{2^{n-1}} = i_{h+2^{n-1}} \quad (\forall h = 1,2,\dots,2^{n-1}-1)$. Nell'insieme $C_3$ dei quaternioni si ha quindi $i_1 i_2 = i_3$, $i_2 \cdot i_3 = i_1$ e $i_3 i_1 = i_2$ (e, per l'anticommutatività di tali prodotti, $i_2 i_1 = -i_3$, $i_3 \cdot i_2 = -i_1$ e $i_1 i_3 = -i_2$).

La relazione

$$i_h i_k = -i_k i_h \quad \forall h,k = 1,2,3 \quad \text{con } h \neq k,$$

come abbiamo già detto per qualunque insieme ipercomplesso, comporta che il prodotto nell'insieme dei quaternioni non è commutativo; da ciò segue che $C_3$, con la sua algebra, non può essere considerato un ampliamento dell'insieme complesso, anch'esso considerato con la sua algebra, dato che la sua costruzione non rispetta il principio di permanenza delle proprietà formali di Hankel. I quaternioni sono il primo insieme numerico per il quale si verifica ciò quindi, dai quaternioni in poi, non potremo più parlare di ampliamenti numerici degli insiemi precedenti (nell'insieme dei numeri complessi ciò non si verifica perché in essi è presente una sola unità immaginaria). Torneremo in seguito su questo.

Nel paragrafo successivo analizzeremo le 4 operazioni fondamentali tra quaternioni e poi tra ipercomplessi generici e, prima di considerarle nell'insieme $C_3$ e in generale nell'insieme $C_{2^n-1}$, analizzeremo le stesse in sottoinsiemi di tali insiemi.

Come già accennato precedentemente, analogamente all'insieme dei numeri complessi in cui definiamo il sottoinsieme dei numeri immaginari (che d'ora in poi indicheremo con $I_{C_1}$) costituito dai complessi aventi parte reale nulla, nell'insieme dei quaternioni definiamo il sottoinsieme dei numeri immaginari (che d'ora in poi indicheremo con $I_{C_3}$) costituito dai quaternioni aventi parte reale nulla.

Mentre gli elementi dell'insieme $I_{C_1}$ sono rappresentati da vettori aventi tutti la stessa origine *O* e situati tutti sull'asse immaginario $I_1$ di versore $i_1$ (in tal caso quindi $I_{C_1}$ si può identificare con $I_1$), gli elementi $a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$ dell'insieme $I_{C_3}$ con $\forall a_1, a_2, a_3 \in R$ possono essere rappresentati nello spazio cartesiano $I_1 I_2 I_3$ dagli infiniti suoi punti $(a_1, a_2, a_3)$ o dagli infiniti vettori $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ aventi origine $O$.

Se identifichiamo il quaternione $a = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$ e il vettore $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $i_1$, $i_2$ e $i_3$ rappresenteranno i versori degli assi cartesiani $I_1$, $I_2$ e $I_3$ (che definiremo assi immaginari, così come chiameremo spazio immaginario lo spazio tridimensionale da essi individuato).

Analogamente, per qualunque insieme ipercomplesso $C_{2^n-1}$ (con $n > 1$), indicheremo con $I_{C_{2^n-1}}$ il sottoinsieme dei suoi elementi aventi parte reale nulla. Ovviamente, $\forall n > 2$, ogni elemento di $I_{C_{2^n-1}}$ potrà ancora essere identificato con la $2^n - 1\_pla$ $(a_1, a_2, .... a_{2^n-1})$ e quindi con un vettore di dimensione $2^n - 1$ (in seguito vedremo come tale vettore potrà essere rappresentato geometricamente).

# 3. LE OPERAZIONI FONDAMENTALI TRA QUATERNIONI IMMAGINARI E IN GENERALE TRA IPERCOMPLESSI IMMAGINARI

Analizziamo ora le 4 operazioni fondamentali in $I_{C_3}$ (e quindi, avendo identificato gli elementi di $I_{C_3}$ con i vettori dello spazio $I_1 I_2 I_3$, le stesse tra tali vettori).

## 3.1. Somma

La somma di 2 quaternioni immaginari si effettua con le solite regole del calcolo letterale:

$$a+b=(a_1i_1+a_2i_2+a_3i_3)+(b_1i_1+b_2i_2+b_3i_3)=(a_1+b_1)i_1+(a_2+b_2)i_2+(a_3+b_3)i_3=\vec{a}+\vec{b},$$

coerentemente col fatto che la somma dei 2 vettori $(a_1,a_2,a_3)$ e $(b_1,b_2,b_3)$ è il vettore $(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$.

La somma di 2 quaternioni immaginari $a$ e $b$, identificabili con i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dello spazio immaginario $I_1 I_2 I_3$, risulta commutativa ed è ancora un quaternione immaginario (come la somma di 2 complessi immaginari è ancora un complesso immaginario), l'insieme $I_{C_3}$ pertanto è chiuso rispetto alla somma (come lo è l'insieme $I_{C_1}$), quindi tale somma può ancora identificarsi con un vettore dello spazio immaginario $I_1I_2I_3$.

Quanto visto per la somma in $I_{C_3}$ può essere generalizzato a un qualunque insieme $I_{C_{2^n-1}}$ ($\forall n>1$); la somma di 2 generici ipercomplessi immaginari $a$ e $b$ si effettua ancora con le solite regole del calcolo letterale:

$$a+b=(a_1i_1+a_2i_2+..a_{2^n-1}i_{2^n-1})+(b_1i_1+b_2i_2+..b_{2^n-1}i_{2^n-1})=(a_1+b_1)i_1+(a_2+b_2)i_2+..(a_{2^n-1}+b_{2^n-1})i_{2^n-1}=\vec{a}+\vec{b},$$

coerentemente col fatto che la somma dei 2 vettori $(a_1,a_2,...a_{2^n-1})$ e $(b_1,b_2,...b_{2^n-1})$ è il vettore $(a_1+b_1,a_2+b_2,...a_{2^n-1}+b_{2^n-1})$.

La somma di 2 ipercomplessi immaginari $a$ e $b$ appartenenti a $I_{C_{2^n-1}}$, identificabili con i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dello spazio immaginario $I_1I_2..I_{2^n-1}$, risulta commutativa ed è, come in $I_{C_1}$ e $I_{C_3}$, ancora un ipercomplesso immaginario appartenente all'insieme $I_{C_{2^n-1}}$; l'insieme $I_{C_{2^n-1}}$ pertanto è ancora chiuso rispetto alla somma, quindi tale somma può ancora identificarsi con un vettore dello spazio immaginario $I_1 I_2 .. I_{2^n-1}$.

### 3.2. Differenza

La differenza tra 2 quaternioni immaginari si effettua con le solite regole del calcolo letterale:

$$a-b=(a_1i_1+a_2i_2+a_3i_3)-(b_1i_1+b_2i_2+b_3i_3)=(a_1-b_1)i_1+(a_2-b_2)i_2+(a_3-b_3)i_3=\vec{a}-\vec{b},$$

coerentemente col fatto che la differenza dei 2 vettori $(a_1, a_2, a_3)$ e $(b_1, b_2, b_3)$ è il vettore $(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$.

La differenza di 2 quaternioni immaginari $a$ e $b$, identificabili con i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dello spazio immaginario $I_1 I_2 I_3$, ovviamente non è commutativa ed è ancora un quaternione immaginario (come la differenza di 2 complessi immaginari è ancora un complesso immaginario), l'insieme $I_{C_3}$ pertanto è chiuso rispetto alla .differenza (come lo è l'insieme $I_{C_1}$), quindi tale differenza può ancora identificarsi con un vettore dello spazio immaginario $I_1 I_2 I_3$ (che ovviamente coincide con somma dei due vettori $\vec{a}$ e $-\vec{b}$).

Come per la somma, quanto visto per la differenza in $I_{C_3}$ può essere generalizzato a un qualunque insieme $I_{C_{2^n-1}}$ $(\forall n > 1)$; la differenza di 2 generici ipercomplessi immaginari $a$ e $b$ si effettua ancora con le solite regole del calcolo letterale:

$$a-b=(a_1i_1+a_2i_2+..a_{2^n-1}i_{2^n-1})-(b_1i_1+b_2i_2+..b_{2^n-1}i_{2^n-1})=(a_1-b_1)i_1+(a_2-b_2)i_2+..(a_{2^n-1}-b_{2^n-1})i_{2^n-1}=\vec{a}-\vec{b},$$

coerentemente col fatto che la differenza dei 2 vettori $(a_1, a_2, ...a_{2^n-1})$ e $(b_1, b_2, ...b_{2^n-1})$ è il vettore $(a_1 - b_1, a_2 - b_2, ...a_{2^n-1} - b_{2^n-1})$.

La differenza di 2 ipercomplessi immaginari $a$ e $b$ appartenenti a $I_{C_{2^n-1}}$, identificabili con i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dello spazio immaginario $I_1I_2..I_{2^n-1}$, ovviamente non è commutativa ed è, come in $I_{C_1}$ e $I_{C_3}$, ancora un ipercomplesso immaginario appartenente all'insieme $I_{C_{2^n-1}}$; l'insieme $I_{C_{2^n-1}}$ pertanto è ancora chiuso rispetto alla differenza, quindi tale differenza può ancora identificarsi con un vettore dello spazio immaginario $I_1I_2..I_{2^n-1}$ (che ovviamente coincide con somma dei due vettori $\vec{a}$ e $-\vec{b}$).

## 3.3. Prodotto

Nella tabella seguente, formata dalle prime 4 righe e dalle prime 4 colonne della tabella alla fine del paragrafo **1.**, riportiamo il prodotto tra due unità immaginarie in $C_3$ (ogni elemento interno alla tabella è il prodotto $i_h i_k$ con $i_h$ elemento della prima riga e $i_k$ elemento della prima colonna).

| $\cdot$ | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ |
|---|---|---|---|
| $i_1$ | $-1$ | $-i_3$ | $i_2$ |
| $i_2$ | $i_3$ | $-1$ | $-i_1$ |
| $i_3$ | $-i_2$ | $i_1$ | $-1$ |

Il prodotto tra 2 quaternioni immaginari $a = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$ e $b = b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3$ si effettua con le solite regole del calcolo letterale, tenendo presente tale tabella:

$$a \cdot b = (a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3) \cdot (b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3) = (-a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) i_1 i_2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) i_1 i_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) i_2 i_3 .$$

Essendo $i_1 i_2 = i_3$, $i_2 i_3 = i_1$, $i_1 i_3 = -i_2$, sarà

$$a \cdot b = (a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3)(b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3) = -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) i_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) i_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) i_1$$

in cui il primo addendo del prodotto è l'opposto del prodotto scalare dei 2 vettori $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ con cui abbiamo identificato i 2 quaternioni; la somma degli altri 3 addendi, invece, è il prodotto vettoriale di tali vettori, da cui:

$$a \cdot b = (a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3)(b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3) = -p.s.(\vec{a};\vec{b}) + p.v.(\vec{a};\vec{b})$$

Il prodotto di 2 quaternioni immaginari $a$ e $b$, identificabili con i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dello spazio immaginario $I_1 I_2 I_3$, quindi, è in generale un quaternione non immaginario, avente come parte reale $-a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$ (così come il prodotto di 2 complessi immaginari è un complesso non immaginario, in tal caso un numero reale), l'insieme $I_{C_3}$ pertanto non è chiuso rispetto al prodotto (come non lo è l'insieme $I_{C_1}$), quindi tale prodotto non può identificarsi con un vettore dello spazio immaginario $I_1 I_2 I_3$ (così come il prodotto in $I_{C_1}$ non può identificarsi con un vettore di origine $O$ che giace sull'asse immaginario $I_1$).

L'uguaglianza

$$a \cdot b = (a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3)(b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3) = -p.s.(\vec{a};\vec{b}) + p.v.(\vec{a};\vec{b})$$

ci permette di affermare che vale nell'insieme dei quaternioni la legge di annullamento del prodotto, risultando

$$a \cdot b = (a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3)(b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3) = -p.s.(\vec{a};\vec{b}) + p.v.(\vec{a};\vec{b}) = 0 \iff a = 0 \vee b = 0.$$

Se i 2 quaternioni $a$ e $b$, e quindi i 2 vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, sono entrambi non nulli, si avrà:

- se e solo se $(a_1b_2 - a_2b_1)i_3 + (a_3b_1 - a_1b_3)i_2 + (a_2b_3 - a_3b_2)i_1 = 0$, e cioè se e solo se i 2 vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ hanno la stessa direzione, il prodotto $a \cdot b$ è un numero reale, risultando in tal caso $p.v.(\vec{a};\vec{b}) = 0$.
- se e solo se $-a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 = 0$, e cioè se e solo se i 2 vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ risultano perpendicolari, il prodotto $a \cdot b$ è un quaternione immaginario, essendo $p.s.(\vec{a};\vec{b}) = 0$. In tal caso, quindi, tale prodotto può ancora identificarsi con un vettore dello spazio immaginario $I_1I_2I_3$.

In generale, quindi, tale prodotto non è né commutativo, né anticommutativo, risultando commutativo il prodotto scalare e anticommutativo il prodotto vettoriale di 2 vettori. Nel caso di vettori perpendicolari risulta anticommutativo (il prodotto scalare è nullo), nel caso di vettori aventi la stessa direzione risulta commutativo (il prodotto vettoriale è nullo).

Aver identificato i quaternioni immaginari con vettori dello spazio immaginario $I_1I_2I_3$, comporterà che il prodotto tra 2 vettori $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ sarà identificato col prodotto $a \cdot b$ dei quaternioni $a = a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3$ e $b = b_1i_1 + b_2i_2 + b_3i_3$; potremo quindi dare la seguente definizione di prodotto di vettori: il prodotto di 2 vettori si ottiene sommando l'opposto del loro prodotto scalare al loro prodotto vettoriale:

$$p.(\vec{a};\vec{b}) = -p.s.(\vec{a};\vec{b}) + p.v.(\vec{a};\vec{b}).$$

Come per i quaternioni, il prodotto di vettori, così definito, verifica la legge di annullamento del prodotto, risultando nullo se e solo se almeno uno dei vettori è nullo.

Risulta:

$$a \cdot b = (a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3)(b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3) = -p.s.(\vec{a};\vec{b}) + p.v.(\vec{a};\vec{b}) = p(\vec{a};\vec{b})$$

e

$$b \cdot a = (b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3)(a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3) = -p.s.(\vec{b};\vec{a}) + p.v.(\vec{b};\vec{a}) = p(\vec{b};\vec{a})$$

da cui, dato che

$$p.s.(\vec{a};\vec{b}) = p.s.(\vec{b};\vec{a}) \quad \text{e} \quad p.v.(\vec{a};\vec{b}) = -p.v.(\vec{b};\vec{a}),$$

sarà

$$p.(\vec{a};\vec{b}) = -p.s.(\vec{a};\vec{b}) + p.v.(\vec{a};\vec{b}) \quad \text{e} \quad p.(\vec{b};\vec{a}) = -p.s.(\vec{a};\vec{b}) - p.v.(\vec{a};\vec{b}).$$

Si ha quindi che, invertendo l'ordine dei fattori del prodotto di 2 quaternioni immaginari $a$ e $b$, si ottengono 2 quaternioni (in generale non immaginari), coniugati:

$$b \cdot a = \overline{a \cdot b}.$$

Analogamente, per i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, invertendo l'ordine dei fattori del prodotto, si ottiene:

$$p.(\vec{b};\vec{a}) = \overline{p.(\vec{a};\vec{b})},$$

in quanto il prodotto di 2 vettori nello spazio $I_1 I_2 I_3$, avendo identificato $a$ e $b$ rispettivamente con $\vec{a}$ e $\vec{b}$, è un quaternione (in generale non immaginario), per il quale, quindi, ha senso considerare il coniugato.

La relazione

$$a \cdot b = (a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3)(b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3) = -p.s.(\vec{a};\vec{b}) + p.v.(\vec{a};\vec{b}) = p(\vec{a};\vec{b})$$

è congruente col prodotto di 2 numeri complessi immaginari $b = b_1 i_1$ e $b' = b'_1 i_1$

$$b \cdot b' = -b_1 b'_1 = -p.s,(\vec{b};\vec{b}') + p.v.(\vec{b};\vec{b}') = -p.s.(\vec{b};\vec{b}') = p.(\vec{b};\vec{b}')$$

in cui i 2 vettori $\vec{b}$ e $\vec{b}'$ di origine $O$ hanno la stessa direzione (quella dell'asse immaginario $I_1$), da cui $p.v.(\vec{b};\vec{b}') = 0$.

Più in generale, se consideriamo il sottoinsieme dei quaternioni immaginari aventi uno dei coefficienti delle unità immaginarie, per esempio il coefficiente di $i_3$, uguale a zero, i vettori identificabili con i suoi elementi giaceranno sul piano $I_1 I_2$ e sarà:

$$(a_1 i_1 + a_2 i_2)(b_1 i_1 + b_2 i_2) = -(a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) i_3 = -p.s.(\vec{a}, \vec{b}) + p.v.(\vec{a}, \vec{b})$$

con

$$\vec{a} = (a_1, a_2, 0) \text{ e } \vec{b} = (b_1, b_2, 0).$$

Se consideriamo il sottoinsieme dei quaternioni immaginari aventi due dei coefficienti delle unità immaginarie, per esempio i coefficienti di $i_2$ e di $i_3$, uguali a zero, i vettori identificabili con i suoi elementi giaceranno sull'asse $I_1$ e sarà:

$$(a_1 i_1)(b_1 i_1) = -(a_1 b_1) = -p.s.(\vec{a}, \vec{b}) + p.v.(\vec{a}, \vec{b})$$

con

$$\vec{a} = (a_1, 0, 0) \text{ e } \vec{b} = (b_1, 0, 0).$$

Quindi, identificando (e chiamandoli ancora allo stesso modo) nel primo caso i vettori $\vec{a} = (a_1, a_2, 0)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, 0)$ dello spazio tridimensionale $I_1 I_2 I_3$ con i vettori $\vec{a} = (a_1, a_2)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2)$ del piano $I_1 I_2$ e nel secondo caso i vettori $\vec{a} = (a_1, 0, 0)$ e $\vec{b} = (b_1, 0, 0)$ dello spazio tridimensionale $I_1 I_2 I_3$ con i vettori $\vec{a} = (a_1)$ e $\vec{b} = (b_1)$ dell'asse $I_1$, per i vettori con la stessa origine, su un asse, su un piano o nello spazio tridimensionale, il loro prodotto può essere in ogni caso definito dalla relazione:

$$p.(\vec{a};\vec{b}) = -p.s.(\vec{a};\vec{b}) + p.v.(\vec{a};\vec{b}).$$

Da quanto visto per il prodotto di quaternioni immaginari, si unificano pure le due relazioni, apparentemente non coerenti:

$$i_h i_h = i_h^{\ 2} = -1 \quad \forall h = 1,2,3$$

$$i_h i_k = -i_k i_h \quad \forall h,k = 1,2,3 \quad \text{con } h \neq k$$

(dalle quali risulterebbe nella prima il prodotto commutativo e nella seconda anticommutativo), essendo esse equivalenti all'unica relazione:

$$i_h i_k = \overrightarrow{u_h} \cdot \overrightarrow{u_k} = -p.s.(\overrightarrow{u_h}, \overrightarrow{u_k}) + p.v.(\overrightarrow{u_h}.\overrightarrow{u_k})$$

in cui abbiamo identificato il quaternione $i_h$ con il vettore $\overrightarrow{u_h}$ e il quaternione $i_k$ con il vettore $\overrightarrow{u_k}$ (in cui $\overrightarrow{u_1} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{u_2} = (0,1,0)$ e $\overrightarrow{u_3} = (0,0,1)$ sono i versori degli assi immaginari $I_1$, $I_2$ e $I_3$).

Costruendo, come fatto per l'insieme degli ottonioni, la relativa tabella del prodotto di 2 unità immaginarie e facendo riferimento ad essa, è possibile generalizzare quanto visto per il prodotto in $I_{C_3}$ a un qualunque insieme $I_{C_{2^n-1}}$ ($\forall n > 1$). Il prodotto di 2 generici ipercomplessi $a$ e $b$, appartenenti all'insieme ipercomplesso $I_{C_{2^n-1}}$, sarà ancora:

$$a \cdot b = \sum_{h=1}^{2^n-1} a_h i_h \cdot \sum_{k=1}^{2^n-1} b_k i_k = -p.s.(\vec{a};\vec{b}) + p.v.(\vec{a};\vec{b}).$$

In questa relazione abbiamo generalizzato di prodotto scalare e vettoriale a vettori di dimensione qualsiasi, anche maggiore di 3, avendo posto:

$$p.s.(\vec{a};\vec{b}) = \sum_{h=1}^{2^n-1} a_h \cdot b_h$$

e

$$p.v.(\vec{a};\vec{b}) = \sum_{h=1}^{2^n-1} a_h i_h \cdot \sum_{k=1}^{2^n-1} b_k i_k - \sum_{h=1}^{2^n-1} a_h i_h b_h i_h = \sum_{h=1}^{2^n-1} a_h i_h \cdot \sum_{k=1}^{2^n-1} b_k i_k + p.s.(\vec{a};\vec{b})).$$

Anche in tal caso sarà quindi:

$$p.(\vec{a};\vec{b}) = p.(a;b) = -p.s.(\vec{a};\vec{b}) + p.v.(\vec{a};\vec{b}) \qquad (1)\ .$$

Ovviamente, come per i quaternioni, il prodotto di due elementi $a$ e $b$ dell'insieme ipercomplesso $I_{C_{2^n-1}}$ non è commutativo essendo il prodotto scalare commutativo e il prodotto vettoriale anticommutativo.

Inoltre, come per i quaternioni, il prodotto di 2 ipercomplessi immaginari $a$ e $b$, appartenenti all'insieme $I_{C_{2^n-1}}$, identificabili con i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dello spazio immaginario $I_1 I_2 .. I_{2^n-1}$, quindi, è in generale un ipercomplesso non immaginario, avente come parte reale $-a_1 b_1 - a_2 b_2 - ... a_{2^n-1} b_{2^n-1}$; l'insieme $I_{C_{2^n-1}}$ pertanto non è chiuso rispetto al prodotto, quindi tale prodotto non può identificarsi con un vettore dello spazio immaginario $I_1 I_2 .. I_{2^n-1}$.

Continua ad essere verificato inoltre in qualunque insieme $I_{C_{2^n-1}}$ quanto visto precedentemente per il prodotto in $I_{C_3}$ e quindi anche per i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ identificabili con i generici ipercomplessi $a, b \in I_{C_{2^n-1}}$. Sarà anche, come visto in $I_{C_3}$ per vettori di dimensione 1 o 2, ancora valida la relazione (1) per vettori di dimensione minore di $2^n - 1$ e, pertanto, sarà valida per vettori di dimensione qualsiasi.

### 3.4. Quoziente

Per calcolare il quoziente

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3}{b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3} \qquad (\text{con } (b_1, b_2, b_3) \neq (0,0,0))$$

determiniamo prima di tutto il reciproco di $b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3$:

$$b^{-1} = \frac{1}{b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3} = -\frac{b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3}{b_1^{\,2} + b_2^{\,2} + b_3^{\,2}}$$

da cui, avendo identificato $a$ e $b$ rispettivamente con $\vec{a}$ e $\vec{b}$, si ha:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3}{b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3} = -(a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3)\cdot\frac{(b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3)}{b_1^{\,2} + b_2^{\,2} + b_3^{\,2}} = -\frac{p.(\vec{a};\vec{b})}{\rho_{\vec{b}}^{\,2}} = -\frac{1}{\rho_{\vec{b}}^{\,2}}\cdot p.(\vec{a};\vec{b})$$

$$\frac{a}{b} = q.(\vec{a};\vec{b}) = \frac{p.s.(\vec{a};\vec{b}) - p.v.(\vec{a};\vec{b})}{\rho_{\vec{b}}^{\,2}} = -\frac{1}{\rho_{\vec{b}}^{\,2}}\cdot p.(\vec{a};\vec{b}) \qquad (2).$$

Il quoziente di 2 quaternioni immaginari (e pertanto dei corrispondenti vettori) è, quindi, un quaternione in generale non immaginario (a meno che, come per il prodotto, i due vettori non siano perpendicolari).

Invertendo l'ordine dei quaternioni (se risulta anche $(a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$) e considerando ancora che il prodotto di 2 vettori dello spazio $I_1 I_2 I_3$ è identificabile con un quaternione e che quindi ha senso considerare il suo coniugato, si ottiene:

$$\frac{b}{a} = q.(\vec{b};\vec{a}) = \frac{p.s.(\vec{b};\vec{a}) - p.v.(\vec{b};\vec{a})}{\rho_{\vec{a}}^{\,2}} = \frac{p.s.(\vec{a};\vec{b}) + p.v.(\vec{a};\vec{b})}{\rho_{\vec{a}}^{\,2}} = -\frac{1}{\rho_{\vec{a}}^{\,2}}\cdot \overline{p.(\vec{a};\vec{b})}$$

da cui

$$\frac{b}{a} = q.(\vec{b};\vec{a}) = -\frac{1}{\rho_{\vec{a}}^{\,2}} \cdot \overline{p.(\vec{a};\vec{b})} = \frac{\rho_{\vec{b}}^{\,2}}{\rho_{\vec{a}}^{\,2}} \overline{q.(\vec{a};\vec{b})} \qquad (3).$$

Avendo generalizzato il prodotto di quaternioni immaginari al prodotto di generici ipercomplessi immaginari, possiamo generalizzare quanto visto per il quoziente di due quaternioni immaginari al quoziente di due generici ipercomplessi immaginari.

Quindi, le formule valide in $I_{C_3}$ per il calcolo del quoziente $a/b$ e per il calcolo di $b/a$ (e la relazione tra $a/b$ e $b/a$), e pertanto per i vettori identificabili con i quaternioni $a$ e $b$, continuano ad essere valide anche in un qualunque insieme ipercomplesso $I_{C_{2^n-1}}$, e quindi anche per i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ identificabili con i generici ipercomplessi $a,b \in I_{C_{2^n-1}}$.

Continuano ad essere valide inoltre, in qualunque insieme $I_{C_{2^n-1}}$, come visto precedentemente per il prodotto, le relazioni (2) e (3) per vettori di dimensione minore di $2^n - 1$ e, pertanto, per vettori di dimensione qualsiasi.

# 4. LE OPERAZIONI FONDAMENTALI TRA QUATERNIONI E IN GENERALE TRA IPERCOMPLESSI

Passiamo ora ad analizzare le 4 operazioni fondamentali tra elementi generici dell'insieme $C_3$. In quanto segue, indicheremo con $\overrightarrow{a_{imm}}$ il vettore identificabile con la parte immaginaria del quaternione $a = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$ e con $\overrightarrow{b_{imm}}$ il vettore identificabile con la parte immaginaria del quaternione $b = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3$.

## 4.1. Somma

La somma tra 2 quaternioni generici si effettua con le solite regole del calcolo letterale:

$$(a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3) + (b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) i_1 + (a_2 + b_2) i_2 + (a_3 + b_3) i_3$$

e quindi

$$(a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3) + (b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3) = (a_0 + b_0) + \overrightarrow{a_{imm}} + \overrightarrow{b_{imm}}.$$

Tale relazione continua a essere valida anche per la somma di 2 elementi generici di qualunque insieme ipercomplesso $C_{2^n-1}$:

$$(a_0 + a_1 i_1 + ... + a_{2^n-1} i_{2^n-1}) + (b_0 + b_1 i_1 + ... + b_{2^n-1} i_{2^n-1}) = (a_0 + b_0) + \overrightarrow{a_{imm}} + \overrightarrow{b_{imm}}.$$

## 4.2. Differenza

La differenza tra 2 quaternioni generici si effettua con le solite regole del calcolo letterale:

$$(a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3) - (b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) i_1 + (a_2 - b_2) i_2 + (a_3 - b_3) i_3$$

e quindi

$$(a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3) - (b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3) = (a_0 - b_0) + \overrightarrow{a_{imm}} - \overrightarrow{b_{imm}}.$$

Tale relazione continua a essere valida anche per la differenza di 2 elementi generici di qualunque insieme ipercomplesso $C_{2^n-1}$:

$$(a_0 + a_1 i_1 + ... + a_{2^n-1} i_{2^n-1}) - (b_0 + b_1 i_1 + ... + b_{2^n-1} i_{2^n-1}) = (a_0 - b_0) + \overrightarrow{a_{imm}} - \overrightarrow{b_{imm}}.$$

## 4.3. Prodotto

Il prodotto tra 2 quaternioni generici $a = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$ e $b = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3$ si effettua con le solite regole del calcolo letterale, tenendo presente la tabella del prodotto delle unità immaginarie:

$$p.(a;b) = (a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3)(b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3) =$$

$$a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) i_1 + (a_0 b_2 + a_2 b_0) i_2 + (a_0 b_3 + a_3 b_0) i_3 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) i_3 - (a_1 b_3 - a_3 b_1) i_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) i_1$$

da cui

$$p.(a;b) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) i_1 + (a_0 b_2 + a_2 b_0) i_2 + (a_0 b_3 + a_3 b_0) i_3 - p.s.(\overrightarrow{a_{imm}};\overrightarrow{b_{imm}}) + p.v.(\overrightarrow{a_{imm}};\overrightarrow{b_{imm}})$$

cioè

$$p.(a;b) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) i_1 + (a_0 b_2 + a_2 b_0) i_2 + (a_0 b_3 + a_3 b_0) i_3 + .p.(\overrightarrow{a_{imm}};\overrightarrow{b_{imm}})$$

e quindi

$$p.(a;b) = a_0 b_0 + a_0 \cdot \overrightarrow{b_{imm}} + b_0 \cdot \overrightarrow{a_{imm}} + p.(\overrightarrow{a_{imm}};\overrightarrow{b_{imm}}).$$

Se almeno uno dei due quaternioni è un numero reale, il prodotto è ovviamente commutativo; ciò è compatibile con la relazione precedente in cui, se per esempio è $a = a_0$, sarà $p.(a;b) = a_0 b_0 + a_0 \cdot \overrightarrow{b_{imm}}$, essendo $b_0 \cdot \overrightarrow{a_{imm}} = 0$ e $p.(\overrightarrow{a_{imm}};\overrightarrow{b_{imm}}) = 0$, dato che $\overrightarrow{a_{imm}} = 0$.

Per quaternioni generici non reali, nel caso in cui i vettori $\overrightarrow{a_{imm}}$ e $\overrightarrow{b_{imm}}$ abbiano la stessa direzione, come per i quaternioni immaginari, il prodotto dei 2 quaternioni risulta commutativo (in tal caso infatti il prodotto vettoriale $p.v.(\overrightarrow{a_{imm}};\overrightarrow{b_{imm}})$, che è l'unico termine presente in $p.(a;b)$ che rende tale prodotto non commutativo, è nullo).

Quindi, come per i quaternioni immaginari, anche se i quaternioni $a$ e $b$ non sono immaginari, se $\overrightarrow{a_{imm}}$ e $\overrightarrow{b_{imm}}$ hanno la stessa direzione o se risulta $\overrightarrow{a_{imm}} = \vec{0}$ o $\overrightarrow{b_{imm}} = \vec{0}$, il prodotto $p.(a;b)$ risulta commutativo.

In generale, se si inverte l'ordine dei fattori, cambia nei risultati dei prodotti solo il segno dei prodotti vettoriali (rappresentati nel prodotto $a \cdot b$ e nel prodotto $b \cdot a$ da vettori opposti nello spazio $I_1 I_2 I_3$) e quindi:

$$p.(b;a) = p.(a;b) - 2p.v.(\overrightarrow{a_{imm}};\overrightarrow{b_{imm}}).$$

Come visto, la prima parte del prodotto $p.(a;b)$ (fino al prodotto scalare) è commutativa (questo giustifica la validità della proprietà commutativa in tutti gli insiemi numerici fino a quello dei numeri complessi), invece la parte successiva (il prodotto vettoriale) è anticommutativa.

Come per i quaternioni immaginari, possiamo generalizzare la definizione di prodotto di quaternioni qualsiasi a tutti gli insiemi numerici i cui elementi hanno una parte vettoriale, quindi dai numeri complessi (come abbiamo visto) in poi.

Così, come per i quaternioni risulta

$$(a_0+a_1i_1+a_2i_2+a_3i_3)\cdot(b_0+b_1i_1+b_2i_2+b_3i_3)=a_0b_0+a_0(b_1i_1+b_2i_2+b_3i_3)+b_0(a_1i_1+a_2i_2+a_3i_3)$$
$$+(a_1i_1+a_2i_2+a_3i_3)(b_1i_1+b_2i_2+b_3i_3)$$

e quindi

$$a\cdot b=a_0b_0+a_0(b_1i_1+b_2i_2+b_3i_3)+b_0(a_1i_1+a_2i_2+a_3i_3)-p.s.(\overrightarrow{a_{imm}};\overrightarrow{b_{imm}})+p.v.(\overrightarrow{a_{imm}};\overrightarrow{b_{imm}}),$$

in generale, per 2 elementi $a$ e $b$ dell'insieme ipercomplesso $C_{2^n-1}$, sarà

$$a\cdot b=\left(a_0+\sum_{h=1}^{2^n-1}a_hi_h\right)\left(b_0+\sum_{h=1}^{2^n-1}b_hi_h\right)=a_0b_0+a_0\sum_{h=1}^{2^n-1}b_hi_h+b_0\sum_{h=1}^{2^n-1}a_hi_h{}_2+\sum_{h=1}^{2^n-1}a_hi_h\cdot\sum_{k=1}^{2^n-1}b_ki_k=$$
$$a_0b_0+a_0\sum_{h=1}^{2^n-1}b_hi_h+b_0\sum_{h=1}^{2^n-1}a_hi_h-p.s.(\overrightarrow{a_{imm}};\overrightarrow{b_{imm}})+p.v.(\overrightarrow{a_{imm}};\overrightarrow{b_{imm}}).$$

Ovviamente, come per i quaternioni, il prodotto di due elementi $a$ e $b$ dell'insieme ipercomplesso $C_{2^n-1}$ non è commutativo e anche in tal caso nella relazione

$$a\cdot b=\left(a_0+\sum_{h=1}^{2^n-1}a_hi_h\right)\left(b_0+\sum_{h=1}^{2^n-1}b_hi_h\right)=a_0b_0+a_0\sum_{h=1}^{2^n-1}b_hi_h+b_0\sum_{h=1}^{2^n-1}a_hi_h{}_2+\sum_{h=1}^{2^n-1}a_hi_h\cdot\sum_{k=1}^{2^n-1}b_ki_k=$$
$$a_0b_0+a_0\sum_{h=1}^{2^n-1}b_hi_h+b_0\sum_{h=1}^{2^n-1}a_hi_h-p.s.(\overrightarrow{a_{imm}};\overrightarrow{b_{imm}})+p.v.(\overrightarrow{a_{imm}};\overrightarrow{b_{imm}})$$

la prima parte del prodotto $p.(a;b)$ (fino al prodotto scalare) è commutativa, mentre il prodotto vettoriale è anticommutativo e pertanto, anche in ogni insieme ipercomplesso $C_{2^n-1}$, è

$$p.(b;a) = p.(a;b) - 2p.v.(\overrightarrow{a_{imm}};\overrightarrow{b_{imm}}).$$

## 4.4. Quoziente

Per calcolare il quoziente di 2 quaternioni generici

$$q.(a;b) = \frac{a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3}{b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3} \qquad (\text{con } (b_0, b_1, b_2, b_3) \neq (0,0,0,0))$$

determiniamo prima di tutto il reciproco di $b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3$:

$$\frac{1}{b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3} = \frac{b_0 - (b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3)}{b_0^{\,2} + b_1^{\,2} + b_2^{\,2} + b_3^{\,2}}$$

da cui:

$$q.(a;b) = \frac{a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3}{b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3} = (a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3) \cdot \frac{b_0 - (b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3)}{b_0^{\,2} + b_1^{\,2} + b_2^{\,2} + b_3^{\,2}} = \frac{p.(a;\bar{b})}{\rho_b^{\,2}}$$

e quindi

$$q.(a;b) = \frac{a_0 b_0 + a_0 (\overrightarrow{-b_{imm}}) + b_0 \overrightarrow{a_{imm}} + p.(\overrightarrow{a_{imm}};\overrightarrow{-b_{imm}})}{b_0^{\,2} + \rho_{\overrightarrow{b_{imm}}}^{\,2}}.$$

Da quanto visto precedentemente per il prodotto di 2 elementi di un generico insieme ipercomplesso $C_{2^n-1}$, tali relazioni saranno ancora valide per il calcolo del quoziente di 2 elementi di un qualunque insieme ipercomplesso $C_{2^n-1}$, quindi, $\forall a, b \in C_{2^n-1}$ (con $b \neq 0$), sarà

$$q.(a;b) = \frac{a_0 + \sum_{h=1}^{2^n-1} a_h i_h}{b_0 + \sum_{h=1}^{2^n-1} b_h i_h} = (a_0 + \sum_{h=1}^{2^n-1} a_h b_h) \cdot \frac{b_0 - \sum_{h=1}^{2^n-1} b_h i_h}{\sum_{h=0}^{2^n-1} b_h^{\ 2}}^{2} = \frac{p.(a;\overline{b})}{\rho_b^{\ 2}},$$

e

$$q.(a;b) = \frac{a_0 b_0 + a_0(\overrightarrow{-b_{imm}}) + b_0 \overrightarrow{a_{imm}} + p.(\overrightarrow{a_{imm}}; \overrightarrow{-b_{imm}})}{b_0^{\ 2} + \rho_{\overrightarrow{b_{imm}}}^{\ 2}}.$$

## 4.5. Osservazioni sull'elemento neutro del prodotto e, in generale, sul prodotto di frazioni

Ovviamente, gli elementi neutri rispettivamente per la somma e per il prodotto nell'insieme dei quaternioni sono $0 = 0 + 0i_1 + 0i_2 + 0i_3$ e $1 = 1 + 0i_1 + 0i_2 + 0i_3$, risultando

$$\forall a = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 \in C_3, \quad a + 0 = 0 + a = a \text{ e } a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

così come, in generale, gli elementi neutri rispettivamente per la somma e per il prodotto in un qualunque insieme di ipercomplessi $C_{2^n-1}$ sono $0 = 0 + 0i_1 + 0i_2 + ...0i_{2^n-1}$ e $1 = 1 + 0i_1 + 0i_2 + ...0i_{2^n-1}$, risultando

$$\forall a = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + ...a_{2^n-1} i_{2^n-1} \in C_{2^n-1}, \quad a + 0 = 0 + a = a \text{ e } a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

Sembrerebbe essere, $\forall n > 1$, per l'elemento neutro rispetto al prodotto, di fronte ad una incongruenza:

$$\forall b = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + \dots b_{2^n-1} i_{2^n-1} \in C_{2^n-1} - \{0\}, \quad \text{è} \quad b/b = 1$$

da cui dovrà essere

$$a \cdot \frac{b}{b} = \frac{b}{b} \cdot a = a$$

che saremmo portati a riscrivere come segue

$$\frac{ab}{b} = \frac{ba}{b} = a$$

in contraddizione con l'essere

$$a \cdot b \cdot \neq b \cdot a \,.$$

In realtà, mentre risulta

$$a \cdot \frac{b}{b} = \frac{ab}{b},$$

in generale, a causa della non commutatività del prodotto tra ipercomplessi, è

$$\frac{b}{b} \cdot a \neq \frac{ba}{b}$$

(differentemente da quanto accade negli insiemi numerici precedenti a quello dei quaternioni).

Infatti:

$$a \cdot \frac{b}{b} = a \cdot b \cdot \frac{1}{b} = \frac{ab}{b} \qquad \text{ma} \qquad \frac{b}{b} \cdot a = b \cdot \frac{1}{b} \cdot a \neq \frac{ba}{b}$$

pur risultando, comunque, anche

$$\frac{b}{b}\cdot a = b\cdot\frac{1}{b}\cdot a = 1\cdot a = a$$

e quindi

$$a\cdot\frac{b}{b} = \frac{b}{b}\cdot a = a\,.$$

In generale, in ogni insieme numerico fino a quello dei numeri complessi, sarà:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = a\cdot\frac{1}{b}\cdot c\cdot\frac{1}{d} = a\cdot c\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \forall a,c \in C_1 \quad \text{e} \quad \forall b,d \in C_1 - \{0\}$$

e, a partire dai quaternioni ($\forall n > 1$), invece, sarà

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = a\cdot\frac{1}{b}\cdot c\cdot\frac{1}{d} \neq a\cdot c\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \forall a,c \in C_{2^n-1} \quad \text{e} \quad \forall b,d \in C_{2^n-1} - \{0\}.$$

# 5. COSTRUZIONE DEGLI AMPLIAMENTI NUMERICI

Il concetto di ampliamento numerico riguarda gli insiemi numerici e le loro algebre.

Il principio di permanenza delle proprietà formali di Hankel afferma che, nella costruzione degli ampliamenti numerici, le proprietà formali delle operazioni valide in un insieme devono continuare a esserlo nei successivi ampliamenti dello stesso.

Tale principio risulta valido nella costruzione, a partire dall'insieme $N$ dei naturali, dei successivi insiemi numerici (che pertanto, rispettando le regole di costruzione dello stesso, possono essere considerati ampliamenti numerici degli insiemi precedenti) fino all'insieme $C_1$ dei complessi, ma non è più valido nella costruzione degli ipercomplessi, dai quaternioni (a causa della non commutatività del prodotto) in poi (negli insiemi successivi ai quaternioni si perdono, come è noto, man mano anche altre proprietà).

In base al principio di Hankel, quindi, l'insieme $C_1$ dei numeri complessi con la sua algebra può essere considerato un ampliamento dell'insieme $R \equiv C_0$ dei numeri reali perché per le operazioni in $C_1$ continuano ad essere verificate le proprietà formali delle operazioni valide in $R$; l'insieme $C_3$ dei quaternioni, invece, non può essere considerato un ampliamento di $C_1$, potremmo solo dire che $C_1$ è un sottoinsieme di $C_3$.

Come visto, quindi, gli insiemi ipercomplessi, assumendo il principio di Hankel imprescindibile nella costruzione dell'ampliamento di un insieme numerico, non possono essere considerati ampliamenti numerici successivi all'insieme dei complessi.

Se vogliamo considerare tali insiemi come ampliamenti degli insiemi precedenti, è necessario pertanto derogare dal principio di Hankel e stabilire nuovi vincoli nella costruzione di ampliamenti di un insieme numerico.

In seguito proviamo a ridefinire i criteri di costruzione di un ampliamento numerico.

Partendo da un insieme numerico, la costruzione di un suo ampliamento consiste nella definizione dei suoi elementi che saranno nuovi oggetti (che chiameremo ancora numeri) e delle operazioni tra tali oggetti.

Come detto, gli elementi del nuovo insieme sono oggetti diversi dagli elementi dell'insieme di partenza, pertanto per le operazioni tra essi, anche qualora si tratti di operazioni già definite nell'insieme di partenza, sarà necessaria una nuova definizione.

Imponiamo che le definizioni degli elementi e delle operazioni dell'ampliamento di un insieme numerico soddisfino i seguenti vincoli:

- gli elementi del nuovo insieme dovranno essere tali che l'insieme di partenza sia identificabile con un sottoinsieme del nuovo insieme;

- se un'operazione è definita nell'insieme di partenza, la stessa operazione, definita nel nuovo insieme, dovrà potersi identificare, nel sottoinsieme identificabile con l'insieme di partenza, con l'operazione definita in esso e pertanto dovranno continuare a essere valide in tale sottoinsieme le proprietà formali valide nell'insieme di partenza. (Ciò, evidentemente, non comporta, come in base al principio di Hankel, per esempio, che le proprietà del prodotto valide da $N$ a $C_1$, continuino ad essere valide in $C_3$, ma semplicemente che, definito il prodotto in $C_3$, per questo, applicato agli elementi del sottoinsieme di $C_3$ identificabile con $C_1$, continuino ad essere valide le stesse proprietà valide per il prodotto in $C_1$);

inoltre:

- se un'operazione è interna a un insieme numerico, tale operazione, opportunamente ridefinita in esso, dovrà essere interna anche ad un suo ampliamento;

- se un elemento è l'elemento neutro rispetto a un'operazione in un insieme numerico, esso dovrà essere identificabile con l'elemento neutro rispetto alla stessa operazione, opportunamente ridefinita in esso, anche in un suo ampliamento;

- se una proprietà di un'operazione non è verificata in un insieme, essa non potrà essere verificata in un suo ampliamento (come d'altronde è ovvio non essendo verificata in un suo sottoinsieme; quindi, se passando da un insieme a un suo ampliamento si perde una proprietà, essa si perderà in tutti gli ampliamenti successivi).

# 6. RAPPRESENTAZIONE DELL'INSIEME DEI QUATERNIONI IN INFINITI PIANI DI GAUSS (ESCLUSI I PUNTI DEGLI ASSI REALI) E IN UN ASSE REALE

In questo paragrafo vedremo come i quaternioni possono essere rappresentati in $\infty^2$ piani di Gauss esclusi i punti degli assi reali (i punti di tali piani saranno identificabili con i quaternioni aventi parti immaginarie non nulle) e in un asse reale (i punti di tale asse saranno identificabili con i quaternioni aventi parti immaginarie nulle, quindi con i numeri reali).

Come detto, in quanto segue vedremo come l'insieme $C_3$ dei quaternioni può essere rappresentato in $\infty^2 = \infty^{2^2-2} = \infty^{2(2^1-1)}$ piani di Gauss esclusi i punti degli assi reali di tali piani e da un asse reale.

In generale, nel prossimo paragrafo, vedremo come ogni insieme ipercomplesso $C_{2^n-1}$ (con $n > 1$) può essere rappresentato dai punti di $\infty^{2^n-2} = \infty^{2(2^{n-1}-1)}$ piani di Gauss esclusi i punti degli assi reali di tali piani e dai punti di un asse reale.

Nell'insieme $I_{C_3}$ dei quaternioni immaginari, la relazione

$$\mathcal{R}: \quad \forall a, b \in I_{C_3}, \quad b \,\mathcal{R}\, a \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in R \,/\, b = ka$$

divide l'insieme $I_{C_3}$ in infiniti sottoinsiemi di quaternioni immaginari aventi i coefficienti delle unità immaginarie proporzionali $(b_1 = ka_1, b_2 = ka_2, b_3 = ka_3)$.

Nello spazio immaginario $I_1 I_2 I_3$ tali sottoinsiemi sono rappresentati, $\forall a \neq 0$, dalle rette passanti per l'origine $O$ e, per $a = 0$, invece, dal sottoinsieme $\{0\}$, formato dal solo quaternione nullo (ottenuto dagli $\infty^1$ prodotti $k \cdot 0 = 0$, al variare di $k$ in $R$), rappresentato dall'origine $O$.

Dato che i punti dello spazio $I_1 I_2 I_3$, come gli elementi di $I_{C_3}$, sono $\infty^3$ e che i punti di ogni retta, come gli elementi di ogni sottoinsieme di $I_{C_3}$ individuato da $\mathcal{R}$ $\forall a \neq 0$, sono $\infty^1$, il numero di tali rette è $\infty^3 / \infty^1 = \infty^2$ (come quindi il numero dei punti di ogni superficie sferica, indipendentemente dal suo raggio; infatti, considerata una qualunque sfera di centro nell'origine, ognuna delle $\infty^2$ rette passanti per l'origine individua sulla sua superficie 2 punti e $2 \cdot \infty^2 = \infty^2$).

L'unione dei sottoinsiemi individuati da $\mathcal{R}$ in $I_{C_3}$ è l'intero insieme $I_{C_3}$ e l'intersezione è l'insieme unitario $\{0\}$ (ovviamente, nello spazio $I_1 I_2 I_3$, ciò è rappresentato dal fatto che, oltre a essere $\{0\}$ uno dei sottoinsiemi individuati da $\mathcal{R}$ in $I_{C_3}$, rappresentato in tale spazio dalla sua origine, le infinite rette identificabili con gli altri sottoinsiemi individuati da $\mathcal{R}$ in $I_{C_3}$ passano tutte per l'origine), quindi $\mathcal{R}$ non è una relazione di equivalenza, dato che non determina una partizione di $I_{C_3}$.

Quanto visto è coerente col fatto che $\mathcal{R}$ risulta riflessiva e transitiva, ma non simmetrica; infatti, per $a \neq 0$, $b = 0$ è in relazione $\mathcal{R}$ con $a$, essendo, per $k = 0$, $b = 0 \cdot a = 0$, ma $a$ non è in relazione $\mathcal{R}$ con $b$, dato che non esiste nessun $h \in R$ per il quale risulti $a = hb$, cosa che invece è possibile $\forall k \neq 0$ dato che in tal caso, se $b = ka$, ovviamente sarà $a = (1/k)b$.

Affinché la relazione $\mathcal{R}$ definita in $I_{C_3}$ sia di equivalenza, la ridefiniamo come segue

$$\mathcal{R}: \quad \forall a, b \in I_{C_3}, \quad b \,\mathcal{R}\, a \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in R - \{0\} / \; b = ka .$$

In tal caso $\mathscr{R}$ risulta, oltre che riflessiva e transitiva, anche simmetrica, individuando pertanto una partizione di $I_{C_3}$ (e quindi dello spazio $I_1I_2I_3$) in classi di equivalenza (il cui numero e la cui cardinalità rimarranno invariati rispetto a quanto visto per i sottoinsiemi di $I_{C_3}$ individuati dalla relazione non simmetrica definita precedentemente).

La relazione $\mathscr{R}$ individua quindi, come detto, una partizione dell'insieme $I_{C_3}$, e equivalentemente dello spazio $I_1I_2I_3$, in classi di equivalenza, delle quali $\infty^2$ formate da $\infty^1$ elementi, rappresentate dalle infinite rette passanti per l'origine $O$ private del punto $O$ stesso, e 1 formata dall'insieme unitario $\{0\}$, rappresentata dall'origine $O$.

L'insieme $C_3$ dei quaternioni si può pensare suddiviso in sottoinsiemi formati, per ogni classe di equivalenza individuata da $\mathscr{R}$ in $I_{C_3}$ (fissato per ognuna di esse un elemento $a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3$ di $I_{C_3}$ dal quale si ha, al variare di $k \in R - \{0\}$, la classe di equivalenza $k(a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3)$ ), sommando un generico numero reale $a_0$ a tale classe.

Tali sottoinsiemi rappresentano le classi di equivalenza individuate in $C_3$ dalla relazione, che chiameremo $\mathcal{R}_{C_3}$, definita come segue.

La relazione d'equivalenza $\mathcal{R}$ definita in $I_{C_3}$ permette di ottenere in $C_3$ la relazione

$$\mathcal{R}_{C_3}: \quad \forall a,b \in C_3, \quad b \; \mathcal{R}_{C_3} \; a \quad \Leftrightarrow \quad b_{imm} \; \mathcal{R} \; a_{imm}.$$

Dalla classe di equivalenza $\{0\}$ ottenuta in $I_{C_3}$ per $k \in R - \{0\}$ con $a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 = 0$, si ottiene quindi, in $C_3$, la classe di equivalenza individuata dalla relazione $\mathcal{R}_{C_3}$ costituita dall'insieme $R$ dei numeri reali, rappresentabile su un asse reale.

Dalle altre classi di equivalenza $k(a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3)$ $\forall k \in R - \{0\}$ con $a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 \neq 0$, si ottengono quindi, in $C_3$, le classi di equivalenza individuate dalla relazione $\mathcal{R}_{C_3}$ costituite dagli insiemi di quaternioni non reali con parti immaginarie proporzionali, ognuno dei quali rappresentabile in un piano di Gauss, esclusi i punti del suo asse reale.

Di seguito ci soffermeremo su tali piani di Gauss i cui assi immaginari saranno sulle rette individuate in $I_1 I_2 I_3$ dai punti

$(ka_1, ka_2, ka_3)$. Su ognuna di tali rette, saranno individuabili 2 versi di percorrenza e, per stabilire il verso degli assi immaginari, scegliamo per esempio una terna $(a_1, a_2, a_3)$ con $a_1$ , o in generale la prima componente non nulla, positiva (se ciò non fosse, potremo ridefinire il quaternione $a_{imm} = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$ a partire dal quale individuare la classe di equivalenza $k(a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3) \quad \forall k \in R - \{0\}$, e quindi l'asse immaginario $I_{a_{imm}}$, ponendo $\overrightarrow{a_{imm}} = h \cdot \overrightarrow{(-a_{imm})}$ con $h = -1$, appartenente ovviamente alla stessa classe di equivalenza).

Per individuare i piani di Gauss procediamo come segue:

- a partire da $I_1^+$, mediante le 2 rotazioni successive di angoli $\alpha_{a_{imm}}$ e $\beta_{a_{imm}}$ con $(\forall k \in R - \{0\})$

  $$\alpha_{a_{imm}} = \tan^{-1} \frac{a_2}{a_1} = \tan^{-1} \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2}} = \tan^{-1} \frac{ka_2}{\sqrt{(ka_1)^2}}$$

  e

  $$\beta_{a_{imm}} = \tan^{-1} \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \tan^{-1} \frac{ka_3}{\sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2}}$$

  rispettivamente nel piano $I_1 I_2$ e perpendicolarmente al piano $I_1 I_2$, otteniamo il semiasse positivo $I^+_{a_{imm}}$ dell'asse immaginario $I_{a_{imm}}$ di versore

$$i_{a_{imm}} = \frac{a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3}{\sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}} = \frac{k a_1 i_1 + k a_2 i_2 + k a_3 i_3}{\sqrt{(k a_1)^2 + (k a_2)^2 + (k a_3)^2}};$$

- a partire da $I^{+}{}_{a_{imm}}$, mediante la rotazione di angolo $-\pi/2$, sempre perpendicolarmente al piano $I_1 I_2$, individuiamo il semiasse positivo $R^{+}{}_{a_{imm}}$ dell'asse reale $R_{a_{imm}}$.

Nel caso in cui sia $a_1 = 0$ e $a_2 \neq 0$, sarà $a_2 / a_1 = a_2 / 0$ impossibile da calcolare e pertanto sarà impossibile da calcolare anche $\alpha_{a_{imm}}$; porremo in tal caso $\alpha_{a_{imm}} = \pi/2$, cioè uguale al limite di $\tan^{-1}\left(a_2 / \sqrt{a_1^{\,2}}\right)$ al tendere a zero di $\sqrt{a_1^{\,2}}$ (come stabilito, dato che la prima componente non nulla di $(a_1, a_2, a_3)$ dovrà essere positiva, sarà $a_2 > 0$); in tal caso l'asse immaginario $I_{a_{imm}}$ e anche l'asse reale $R_{a_{imm}}$ saranno nel piano $I_2 I_3$.

Nel caso in cui sia $a_1 = a_2 = 0$, sarà $a_2 / a_1$ indeterminato e quindi anche $\alpha_{a_{imm}}$ risulterà indeterminato, mentre sarà $a_3 / \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}} = a_3 / 0$ impossibile da calcolare e pertanto sarà impossibile da calcolare anche $\beta_{a_{imm}}$; porremo in tal caso $\beta_{a_{imm}} = \pi/2$, cioè uguale al limite di $\tan^{-1}(a_3 / \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}})$ al tendere a zero di $\sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$ (come stabilito, dato che la prima componente non nulla di $(a_1, a_2, a_3)$ dovrà essere positiva, sarà $a_3 > 0$); in tal caso, quindi, all'asse immaginario $I_{a_{imm}}$ che coinciderà con $I_3$, corrisponderà, sul piano $I_1 I_2$, un asse reale $R_{a_{imm}}$ indeterminato, passante per l'origine, il cui semiasse positivo $R^+{}_{a_{imm}}$ si ottiene dalla rotazione di $I^+{}_{a_{imm}}$ di $-\pi/2$ su un qualunque piano passante per $I_3$, quindi perpendicolare al piano $I_1 I_2$.

In ognuno degli $\infty^2$ piani di Gauss $R_{a_{imm}} I_{a_{imm}}$, escludendo i punti dell'asse reale, si possono rappresentare $\infty^2$ elementi di $C_3 - R$ e quindi complessivamente si possono rappresentare gli $\infty^4$ elementi di $C_3 - R$.

Per ogni quaternione immaginario $a_{imm} = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$, il generico quaternione non reale $a_0 + ka_1 i_1 + ka_2 i_2 + ka_3 i_3$ con $a_0 \in R$ e $k \in R - \{0\}$ sarà rappresentato:

- in forma cartesiana, dalla coppia

$$\left(a_0, \rho_{ka_{imm}}\right) = (a_0, k\rho_{a_{imm}}),$$

con

$$\rho_{ka_{imm}} = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2 + (ka_3)^2} = k\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2} = k\rho_{a_{imm}}$$

e

- in forma polare, dalla coppia

$$\left(\rho_{a_0,ka_{imm}},\gamma_{a_0,ka_{imm}}\right)$$

o, equivalentemente, nella forma trigonometrica

$$a_{a_0,ka_{imm}}=\rho_{a_0,ka_{imm}}\left(\cos\gamma_{a_0,ka_{imm}}+i_{a_{imm}}\sin\gamma_{a_0,ka_{imm}}\right),$$

con

$$\rho_{a_0,ka_{imm}}=\sqrt{a_0^{\;2}+(ka_1)^2+(ka_2)^2+(ka_3)^2}$$

e

$$\gamma_{a_0,ka_{imm}}=\tan^{-1}\frac{\rho_{ka_{imm}}}{a_0}\quad \text{se}\quad a_0>0\quad \text{oppure}\quad \gamma_{a_0,ka_{imm}}=\tan^{-1}\frac{\rho_{ka_{imm}}}{a_0}+\pi\quad \text{se}\quad a_0<0\cdot$$

Il piano di Gauss in cui possiamo rappresentare il quaternione non reale $b$ (e gli altri della stessa classe di equivalenza), si otterrà dal piano di Gauss in cui possiamo rappresentare il quaternione non reale $a$ (e gli altri della stessa classe di equivalenza), facendo ruotare quest'ultimo piano intorno all'origine $O$ di $\alpha_{b_{imm}}-\alpha_{a_{imm}}$ parallelamente al piano $I_1I_2$ e, a seguire, di $\beta_{b_{imm}}-\beta_{a_{imm}}$ perpendicolarmente al piano $I_1I_2$, con

$$\alpha_{a_{imm}}=\tan^{-1}\frac{a_2}{\sqrt{a_1^{\;2}}}=\tan^{-1}\frac{a_2}{a_1},\qquad \beta_{a_{imm}}=\tan^{-1}\frac{a_3}{\sqrt{a_1^{\;2}+a_2^{\;2}}}$$

e

$$\alpha_{b_{imm}} = \tan^{-1}\frac{b_2}{\sqrt{b_1^{\ 2}}} = \tan^{-1}\frac{b_2}{b_1}, \qquad \beta_{b_{imm}} = \tan^{-1}\frac{b_3}{\sqrt{b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}}}.$$

(Nel caso in cui uno dei 2 piani di Gauss abbia asse immaginario coincidente con l'asse $I_3$, per quanto visto precedentemente, il corrispondente angolo $\alpha_{a_{imm}}$ o $\alpha_{b_{imm}}$ sarà indeterminato e pertanto potrà supporsi $\alpha_{b_{imm}} = \alpha_{a_{imm}}$ da cui $\alpha_{b_{imm}} - \alpha_{a_{imm}} = 0$).

Ovviamente, se $b \ \mathscr{R}_{C_3} \ a$, sarà $\alpha_{b_{imm}} - \alpha_{a_{imm}} = \beta_{b_{imm}} - \beta_{a_{imm}} = 0$.

Come già detto, in ognuno dei piani di Gauss (esclusi i punti degli assi reali di tali piani) in cui potremo rappresentare i quaternioni non reali saranno rappresentati $\infty^2$ elementi di $C_3 - R$ le cui parti immaginarie sono identificabili con vettori aventi la stessa direzione (quella dell'asse immaginario); pertanto, il prodotto degli elementi di $C_3 - R$ che si possono rappresentare in ogni piano di Gauss è commutativo. In generale, in ognuno di tali piani continueranno a essere verificate tutte le proprietà formali delle operazioni definite nell'insieme $C_1$ dei numeri complessi, pertanto si potrà operare in ognuno di essi come in tale insieme.

Riepilogando quanto visto, l'insieme $C_3$ dei quaternioni si può identificare con $\infty^2$ insiemi di quaternioni non reali, che possono essere rappresentati in piani di Gauss (esclusi i punti degli assi reali di tali piani), ruotati l'uno rispetto all'altro intorno alla loro origine, e 1 insieme di quaternioni reali, che può ovviamente essere rappresentato in un asse reale.

Per le operazioni tra gli elementi di ognuno degli $\infty^2$ insiemi di quaternioni con parti immaginarie proporzionali, così come per le operazioni tra un elemento di uno qualsiasi di tali insiemi e un elemento dell'insieme dei quaternioni reali, sono verificate tutte le proprietà formali delle operazioni valide nell'insieme $C_1$ dei numeri complessi.

# 7. RAPPRESENTAZIONE DI UN QUALUNQUE INSIEME IPERCOMPLESSO IN INFINITI PIANI DI GAUSS (ESCLUSI I PUNTI DEGLI ASSI REALI) E IN UN ASSE REALE

In questo paragrafo generalizzeremo quanto visto in quello precedente per l'insieme $C_3$ dei quaternioni.

Come nell'insieme $I_{C_3}$ dei quaternioni immaginari, definiamo, nel sottoinsieme $I_{C_{2^n-1}}$ degli ipercomplessi immaginari di un qualunque insieme $C_{2^n-1}$ (con $n>1$), la relazione

$$\mathscr{R}\colon\ \forall a,b \in I_{2^n-1},\ \ b\,\mathscr{R}\,a \ \Leftrightarrow\ \exists k \in R-\{0\}/\ b = k\cdot a$$

che ci permetterà di verificare come tutti gli insiemi $C_{2^n-1}$ possono essere rappresentati (come già anticipato nel paragrafo precedente) in $\infty^{2^n-2}=\infty^{2(2^{n-1}-1)}$ piani di Gauss esclusi i punti degli assi reali (i punti di tali piani saranno identificabili con gli elementi di $C_{2^n-1}$ aventi parti immaginarie non nulle) e in un asse reale (i punti di tale asse saranno identificabili con gli elementi di $C_{2^n-1}$ aventi parti immaginarie nulle, quindi con i numeri reali).

La relazione $\mathscr{R}$ individua una partizione dell'insieme $I_{C_{2^n-1}}$, e equivalentemente dello spazio $I_1 I_2 I_3 ... I_{2^n-1}$, in classi di equivalenza, delle quali $\infty^{2^n-2}$ formate da $\infty^1$ elementi, rappresentate da infinite rette passanti per l'origine $O$ (private del punto $O$ stesso) dello spazio $I_1 I_2 I_3 ... I_{2^n-1}$, e 1 formata dall'insieme unitario $\{0\}$, rappresentata dall'origine $O$.

In quanto segue cercheremo di dare un significato a uno spazio $I_1 I_2 I_3 ... I_{2^n-1}$ per $n > 2$, quindi di dimensione maggiore di 3, e di rappresentare in esso il vettore $(a_1, a_2, ... a_{2^n-1})$, passando, come vedremo, per $2^{n-1} - 1$ spazi tridimensionali.

Identificheremo ogni vettore $(a_1, a_2, ..., a_{2m+1})$ dello spazio $I_1 I_2 I_3 ... I_{2m+1}$ (con $0 < m < 2^{n-1}$) con il vettore $(\sqrt{\sum_{h=1}^{2m-1} a_h{}^2}, a_{2m}, a_{2m+1})$ dello spazio tridimensionale $I_{a_1 i_1 + ... a_{2m-1} i_{2m-1}} I_{2m} I_{2m+1}$ (in ognuno di tali spazi, per $m > 1$, gli assi $I_{2m}$ e $I_{2m+1}$ dipendono dall'asse delle ascisse

$I_{a_1 i_1 + \ldots a_{2m-1} i_{2m-1}}$; in quanto segue continueremo a chiamarli allo stesso modo anche nel caso in cui, essendo diverso l'asse delle ascisse, saranno diversi anche gli assi delle ordinate e delle quote); per $m = 1$ si avrà ovviamente lo spazio tridimensionale $I_1 I_2 I_3$, in cui $I_1 \equiv I_{a_1 i_1}$.

La classe di equivalenza $k(a_1, a_2, \ldots, a_{2^n - 1})$ dello spazio $I_1 I_2 I_3 \ldots I_{2^n - 1}$ sarà quindi la classe di equivalenza $k(\sqrt{\sum_{h=1}^{2^n - 3} a_h{}^2}, a_{2^n - 2}, a_{2^n - 1})$ dello spazio $I_{a_1 i_1 + \ldots a_{2^n - 3} i_{2^n - 3}} I_{2^n - 2} I_{2^n - 1}$.

L'insieme $C_{2^n - 1}$ si può pensare suddiviso in sottoinsiemi formati, per ogni classe di equivalenza individuata da $\mathscr{R}$ in $I_{C_{2^n - 1}}$ (fissato per ognuna di esse un elemento $a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots a_{2^n - 1} i_{2^n - 1}$ di $I_{C_{2^n - 1}}$ dal quale si ha, al variare di $k \in R - \{0\}$, la classe di equivalenza $k(a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots a_{2^n - 1} i_{2^n - 1})$), sommando un generico numero reale $a_0$ a tale classe.

Tali sottoinsiemi rappresentano le classi di equivalenza individuate in $C_{2^n - 1}$ dalla relazione, che chiameremo $\mathscr{R}_{C_{2^n - 1}}$, definita come segue.

La relazione d'equivalenza $\mathcal{R}$ definita in $I_{C_{2^n-1}}$ permette di ottenere in $C_{2^n-1}$ la relazione d'equivalenza

$$\mathcal{R}_{C_{2^n-1}}: \quad \forall a,b \in C_{2^n-1}, \quad b \ \mathcal{R}_{C_{2^n-1}} \ a \quad \Leftrightarrow \quad b_{imm} \ \mathcal{R} \ a_{imm}.$$

Dalla classe di equivalenza $\{0\}$ ottenuta in $I_{C_{2^n-1}}$ per $k \in R-\{0\}$ con $a_1i_1 + a_2i_2 + ...a_{2^n-1}i_{2^n-1} = 0$, si ottiene, in $C_{2^n-1}$, la classe di equivalenza individuata dalla relazione $\mathcal{R}_{C_{2^n-1}}$ costituita dall'insieme $R$ dei numeri reali, rappresentabile su un asse reale.

Dalle altre classi di equivalenza $k(a_1i_1 + a_2i_2 + ... + a_{2^n-1}i_{2^n-1})$ $\forall k \in R-\{0\}$ con $a_1i_1 + a_2i_2 + ...a_{2^n-1}i_{2^n-1} \neq 0$, si ottengono, in $C_{2^n-1}$, le classi di equivalenza individuate dalla relazione $\mathcal{R}_{C_{2^n-1}}$ costituite dagli insiemi di ipercomplessi non reali con parti immaginarie proporzionali, ognuno dei quali rappresentabile in un piano di Gauss (come detto, esclusi i punti del suo asse reale).

L'asse immaginario di ognuno di tali piani di Gauss sarà su una retta individuata, come vedremo, dalle $2^n - 1\_ple$

$(ka_1, ka_2, ... ka_{2^n-1})$ (e quindi da una classe di equivalenza individuata da $\mathcal{R}$ in $I_{C_{2^n-1}}$) in cui, fissata la $2^n - 1\_pla$ $(a_1, a_2, ... a_{2^n-1}) \neq (0,0,...0)$, $k$ assume tutti i valori reali non nulli.

Su ognuna di tali rette, saranno individuabili 2 versi di percorrenza e, per stabilire il verso degli assi immaginari, scegliamo per esempio (come fatto per i quaternioni) una $2^n - 1\_pla$ $(a_1, a_2, ... a_{2^n-1})$ con $a_1$, o in generale la prima componente non nulla, positiva (se ciò non fosse, potremo ridefinire l'ipercomplesso immaginario $a_{imm} = a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... a_{2^n-1} i_{2^n-1}$ a partire dal quale individuare la classe di equivalenza $k(a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... a_{2^n-1} i_{2^n-1})$ $\forall k \in R - \{0\}$, e quindi l'asse immaginario $I_{a_{imm}}$, ponendo $\overrightarrow{a_{imm}} = h \cdot \overrightarrow{(-a_{imm})}$ con $h = -1$, appartenente ovviamente alla stessa classe di equivalenza).

Per determinare, per ogni classe di equivalenza $k(a_1 i_1 + a_2 i_2 +, ... a_{2^n-1} i_{2^n-1})$ con $a_1 i_1 + a_2 i_2 +, ... a_{2^n-1} i_{2^n-1} \neq 0$ individuata da $\mathcal{R}$ in $I_{C_{2^n-1}}$, il piano di Gauss in cui rappresentare $a_0 + k(a_1 i_1 + a_2 i_2 +, ... a_{2^n-1} i_{2^n-1}) \in C_{2^n-1} - R$ $\forall a_0 \in R$ e $\forall k \in R - \{0\}$, procediamo come segue:

1.

- partiamo dal vettore $a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3$ che, nello spazio $I_1I_2I_3$, individuerà l'asse $I_{a_1i_1+a_2i_2+a_3i_3}$ di versore

$$i_{a_1i_1+a_2i_2+a_3i_3} = \frac{a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3}{\sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}}}$$

(su cui saranno tutti i punti di coordinate $(ka_1, ka_2, ka_3) \in I_1I_2I_3$, $\forall k \in R - \{0\})$

e

- facciamo ruotare il riferimento $I_1I_2I_3$ intorno a $O$ in modo tale che il semiasse $I^+{}_1$, mediante le 2 rotazioni successive di angoli $(\forall k \in R - \{0\})$

$$\alpha_{1_{a_{imm}}} = \tan^{-1}\frac{a_2}{a_1} = \tan^{-1}\frac{a_2}{\sqrt{a_1^{\ 2}}} = \tan^{-1}\frac{ka_2}{\sqrt{(ka_1)^2}}$$

e

$$\beta_{1_{a_{imm}}} = \tan^{-1}\frac{a_3}{\sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}}} = \tan^{-1}\frac{ka_3}{\sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2}}$$

rispettivamente nel piano $I_1I_2$ e perpendicolarmente al piano $I_1I_2$, si sovrapponga al semiasse $I^+{}_{a_1i_1+a_2i_2+a_3i_3}$ e quindi che l'asse $I_1$ si sovrapponga (con lo stesso orientamento) all'asse $I_{a_1i_1+a_2i_2+a_3i_3}$; le posizioni finali di $I_2$ e $I_3$

rappresenteranno rispettivamente gli assi $I_4$ e $I_5$ del riferimento $I_{\sum_{h=1}^{3} a_h i_h} I_4 I_5$, che dipenderanno, come detto, dall'asse $I_{\sum_{h=1}^{3} a_h i_h}$ e quindi dal vettore $a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$; in tale riferimento, il vettore $(a_1, a_2, a_3)$ del riferimento $I_1 I_2 I_3$ sarà, sull'asse delle ascisse $I_{\sum_{h=1}^{3} a_h i_h}$, il vettore di origine $O$ e modulo $\sqrt{\sum_{h=1}^{3} a_h^{\ 2}}$;

2.

- come fatto nello spazio $I_1 I_2 I_3$ per il vettore $a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$, rappresentiamo in $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3} I_4 I_5$ il vettore $\left(\sqrt{\sum_{h=1}^{3} a_h^{\ 2}}\right) i_{\sum_{h=1}^{3} a_h i_h} + a_4 i_4 + a_5 i_5$ che è quindi il vettore $(a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3) + a_4 i_4 + a_5 i_5 = \sum_{h=1}^{5} a_h i_h$ dello spazio $I_1 I_2 I_3 I_4 I_5$ (dato che il vettore $\left(\sqrt{\sum_{h=1}^{3} a_h^{\ 2}}, 0, 0\right)$ dello spazio $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3} I_4 I_5$ coincide con il vettore $(a_1, a_2, a_3)$ dello spazio $I_1 I_2 I_3$), il quale individuerà l'asse $I_{\left(\sqrt{\sum_{h=1}^{3} a_h^2}\right) i_{\sum_{h=1}^{3} a_h i_h} + a_4 i_4 + a_5 i_5}$ di versore

$$i_{\left(\sqrt{\sum_{h=1}^{3} a_h^2}\right) i_{\sum_{h=1}^{3} a_h i_h} + a_4 i_4 + a_5 i_5} = \frac{\left(\sqrt{\sum_{h=1}^{3} a_h^2}\right) i_{\sum_{h=1}^{3} a_h i_h} + a_4 i_4 + a_5 i_5}{\sqrt{\left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\right)^2 + \ldots . a_5^2}}$$

e quindi

$$i_{\left(\sqrt{\sum_{h=1}^{3} a_h^2}\right) i_{\sum_{h=1}^{3} a_h i_h} + a_4 i_4 + a_5 i_5} = \frac{\left(\sqrt{\sum_{h=1}^{3} a_h^2}\right) i_{\sum_{h=1}^{3} a_h i_h} + a_4 i_4 + a_5 i_5}{\sqrt{\sum_{h=1}^{5} a_h^2}},$$

che coincide con l'asse $I_{\sum_{h=1}^{5} a_h i_h}$ dello spazio $I_1 I_2 I_3 I_4 I_5$, di versore

$$i_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots a_5 i_5} = \frac{a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots . a_5 i_5}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots . a_5^2}}$$

(su cui saranno tutti i punti di coordinate $(k\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, ka_4, ka_5) \in I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3} I_4 I_5,\ \forall k \in R - \{0\})$

e

- facciamo ruotare il riferimento $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3} I_4 I_5$ intorno a $O$ in modo tale che il semiasse $I^+_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3}$, mediante le 2 rotazioni successive di angoli $(\forall k \in R - \{0\})$

$$\alpha_{2_{a_{imm}}} = \tan^{-1} \frac{a_4}{\sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}}} = \tan^{-1} \frac{ka_4}{\sqrt{\sum_{h=1}^{3} (ka_h)^2}}$$

e

$$\beta_{2_{a_{imm}}} = \tan^{-1} \frac{a_5}{\sqrt{(\sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}})^2 + a_4^{\ 2}}} = \tan^{-1} \frac{a_5}{\sqrt{\sum_{h=1}^{4} a_h^{\ 2}}} = \frac{ka_5}{\sqrt{\sum_{h=1}^{4} (ka_h)^2}}$$

rispettivamente nel piano $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3} I_4$ e perpendicolarmente al piano $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3} I_4$, si sovrapponga al semiasse $I^+_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots a_5 i_5}$ e quindi che l'asse $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3}$ si sovrapponga (con lo stesso orientamento) all'asse $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots a_5 i_5}$; le posizioni finali rispettivamente di $I_4$ e $I_5$ saranno rispettivamente gli assi $I_6$ e $I_7$ che dipenderanno, come detto, dall'asse $I_{\sum_{h=1}^{5} a_h i_h}$ del riferimento $I_{\sum_{h=1}^{5} a_h i_h} I_6 I_7$, nel quale il vettore $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ del riferimento $I_1 I_2 I_3 I_4 I_5$ sarà, sull'asse delle ascisse $I_{\sum_{h=1}^{5} a_h i_h}$, il vettore di origine $O$ e modulo $\sqrt{\sum_{h=1}^{5} a_h^{\ 2}}$;

3.

- come fatto nei 2 precedenti riferimenti $I_1I_2I_3$ e $I_{a_1i_1+a_2i_2+a_3i_3}I_4I_5$ rispettivamente per i vettori $a_1i_1+a_2i_2+a_3i_3$ e $a_1i_1+a_2i_2+.....a_5i_5$, rappresentiamo in $I_{a_1i_1+a_2i_2+...a_5i_5}I_6I_7$ il vettore $\left(\sqrt{\sum_{h=1}^{5}a_h^{\ 2}}\right)i_{\sum_{h=1}^{5}a_hi_h}+a_6i_6+a_7i_7$ che è quindi il vettore $(a_1i_1+....a_5i_5)+a_6i_6+a_7i_7=\sum_{h=1}^{7}a_hi_h$ dello spazio $I_1I_2I_3I_4I_5I_6I_7$ (dato che il vettore $\left(\sqrt{\sum_{h=1}^{5}a_h^{\ 2}},0,0\right)$ dello spazio $I_{a_1i_1+a_2i_2..+a_5i_5}I_6I_7$ è il vettore $(a_1,a_2...a_5)$ dello spazio $I_1I_2I_3I_4I_5$), il quale individuerà l'asse $I_{\left(\sqrt{\sum_{h=1}^{5}a_h^{\ 2}}\right)i_{\sum_{h=1}^{5}a_hi_h}+a_6i_6+a_7i_7}$ di versore

$$i_{\left(\sqrt{\sum_{h=1}^{5}a_h^{\ 2}}\right)i_{\sum_{h=1}^{5}a_hi_h}+a_6i_6+a_7i_7}=\frac{\left(\sqrt{\sum_{h=1}^{5}a_h^{\ 2}}\right)i_{\sum_{h=1}^{5}a_hi_h}+a_6i_6+a_7i_7}{\sqrt{\left(\sqrt{\left(\sqrt{\sum_{h=1}^{3}a_h^{\ 2}}\right)^2+a_4^{\ 2}+a_5^{\ 2}}\right)^2+a_6^{\ 2}+a_7^{\ 2}}}$$

e quindi

$$i_{\left(\sqrt{\sum_{h=1}^{5} a_h^{\,2}}\right) i_{\sum_{h=1}^{5} a_h i_h} + a_6 i_6 + . a_7 i_7} = \frac{\left(\sqrt{\sum_{h=1}^{5} a_h^{\,2}}\right) i_{\sum_{h=1}^{5} a_h i_h} + a_6 i_6 + a_7 i_7}{\sqrt{\sum_{h=1}^{7} a_h^{\,2}}}$$

(su cui saranno tutti i punti di coordinate $(k\sqrt{(\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}})^2+a_4^{\,2}+a_5^{\,2}}, ka_6, ka_7) = (k\sqrt{\sum_{h=1}^{5} a_h^{\,2}}, ka_6, ka_7) \in I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + .. a_5 i_5} I_6 I_7$, $\forall k \in R - \{0\}$), che coincide con l'asse $I_{\sum_{h=1}^{7} a_h i_h}$ dello spazio $I_1 I_2 .... I_7$, di versore

$$i_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... a_7 i_7} = \frac{a_1 i_1 + a_2 i_2 + ..... a_7 i_7}{\sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + ..... a_7^{\,2}}}$$

(su cui saranno tutti i punti di coordinate $(ka_1, ka_2, ....ka_7) \in I_1 I_2 .... I_7$, $\forall k \in R - \{0\}$).

Tale asse, nel caso in cui l'ipercomplesso considerato sia un ottonione, sarà l'asse immaginario $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... a_7 i_7} = I_{a_{imm}}$ (di versore $i_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... a_7 i_7} = i_{a_{imm}}$) del piano di Gauss in cui potremo rappresentare gli infiniti ottonioni $a_0 + k(a_1 i_1 + a_2 i_2 + ..... a_7 i_7)$, $\forall a_0 \in R$ e $\forall k \in R - \{0\}$; esso si potrà pensare ottenuto a partire dal semiasse $I^{+}_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... a_5 i_5}$, mediante le 2 rotazioni successive di angoli

$$\alpha_{3_{a_{imm}}} = \tan^{-1}\frac{a_6}{\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+..a_5^{\ 2}}}$$

e

$$\beta_{3_{a_{imm}}} = \tan^{-1}\frac{a_7}{\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+..a_6^{\ 2}}}$$

rispettivamente nel piano $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 +..a_5 i_5} I_6$ e perpendicolarmente al piano $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 +..a_5 i_5} I_6$;

- a partire da $I^+_{a_{imm}}$, mediante la rotazione di angolo $-\pi/2$, sempre perpendicolarmente al piano $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 +..a_5 i_5} I_6$, individuiamo il semiasse positivo $R^+_{a_{imm}}$ dell'asse reale $R_{a_{imm}}$ del piano di Gauss $R_{a_{imm}} I_{a_{imm}}$ in cui potremo rappresentare gli ottonioni $a_0 + k(a_1 i_1 + a_2 i_2 + .....a_7 i_7) \in C_7 - R$, $\forall a_0 \in R$ e $\forall k \in R - \{0\}$.

Come visto, per poter ottenere gli $\infty^2$ piani di Gauss in cui rappresentare (esclusi i punti degli assi reali) l'insieme $C_3 - R$, passiamo per 1 spazio tridimensionale e per poter ottenere gli $\infty^6$ piani di Gauss in cui rappresentare (esclusi i punti degli assi reali) l'insieme $C_7 - R$, passiamo per 3 spazi tridimensionali; in generale, come vedremo, per poter ottenere $(\forall n > 1)$ gli $\infty^{2^n - 2}$ piani di Gauss in cui rappresentare (esclusi i punti degli assi reali) l'insieme $C_{2^n-1} - R$, passiamo per $2^{n-1} - 1$ spazi tridimensionali.

Per ogni $C_{2^n-1}$, per individuare il piano di Gauss in cui potremo rappresentare, a partire da $a_1 i_1 + a_2 i_2 + .....a_{2^n-1} i_{2^n-1} \neq 0$ fissato, una delle classi di equivalenza (diversa da quella identificabile con l'insieme dei numeri reali) individuata in tale insieme dalla relazione $\mathscr{R}_{C_{2^n-1}}$, e cioè gli infiniti suoi elementi $a_0 + k(a_1 i_1 + a_2 i_2 + .....a_{2^n-1} i_{2^n-1}) \in C_{2^n-1} - R$ $(\forall a_0 \in R$ e $\forall k \in R - \{0\})$, procediamo come fatto nel caso di $n = 3$ per gli ottonioni.

Arrivati allo spazio $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... a_{2^n-3} i_{2^n-3}} I_{2^n-2} I_{2^n-1}$, consideriamo in esso il vettore $\left(\sqrt{\sum_{h=1}^{2^n-3} a_h^{\ 2}}\right) i_{\sum_{h=1}^{2^n-3} a_h i_h} + a_{2^n-2} i_{2^n-2} + a_{2^n-1} i_{2^n-1}$, che coincide con il vettore $a_1 i_1 + a_2 i_2 + .....a_{2^n-1} i_{2^n-1}$ dello spazio $I_1 I_2 .... I_{2^n-1}$ (dato che il vettore $\left(\sqrt{\sum_{h=1}^{2^n-3} a_h^{\ 2}}, 0, 0\right)$ dello spazio $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 .. + a_{2^n-3} i_{2^n-3}} I_{2^n-2} I_{2^n-1}$ è il vettore $(a_1, a_2 ... a_{2^n-3})$ dello spazio

$I_1 I_2 I_3 ... I_{2^n-3}$); l'asse individuato da tale vettore sarà l'asse immaginario $I_{a_{imm}} \equiv I_{\left(\sqrt{\sum_{h=1}^{2^n-3} a_h^2}\right) i_{\sum_{h=1}^{2^n-3} a_h i_h} + a_{2^n-2} i_{2^n-2} + a_{2^n-1} i_{2^n-1}}$ di versore

$$i_{\left(\sqrt{\sum_{h=1}^{2^n-3} a_h^2}\right) i_{\sum_{h=1}^{2^n-3} a_h i_h} + a_{2^n-2} i_{2^n-2} + .a_{2^n-1} i_{2^n-1}} = \frac{\left(\sqrt{\sum_{h=1}^{2^n-3} a_h^2}\right) i_{\sum_{h=1}^{2^n-3} a_h i_h} + a_{2^n-2} i_{2^n-2} + a_{2^n-1} i_{2^n-1}}{\sqrt{\sum_{h=1}^{2^n-1} a_h^2}}$$

se rappresentato nello spazio tridimensionale $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... a_{2^n-3} i_{2^n-3}} I_{2^n-2} I_{2^n-1}$ (e quindi, $\forall k \in R - \{0\}$, l'asse immaginario $I_{a_{imm}} \equiv I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + .... a_{2^n-1} i_{2^n-1}}$ di versore

$$i_{a_{imm}} = \frac{\sum_{h=1}^{2^n-1} a_h i_h}{\sqrt{\sum_{h=1}^{2^n-1} a_h^2}} = \frac{\sum_{h=1}^{2^n-1} k a_h i_h}{\sqrt{\sum_{h=1}^{2^n-1} (k a_h)^2}}$$

se rappresentato nello spazio $I_1 I_2 .... I_{2^n-1}$) del piano di Gauss cercato.

Tale asse immaginario si potrà pensare ottenuto a partire dal semiasse $I^+_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... a_{2^n-3} i_{2^n-3}}$, mediante le due rotazioni successive di angoli

$$\alpha_{2^{n-1}-1_{a_{imm}}} = \tan^{-1}\frac{a_{2^n-2}}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + ..a_{2^n-3}{}^2}} = \tan^{-1}\frac{a_{2^n-2}}{\sqrt{\sum_{h=1}^{2^n-3} a_h{}^2}}$$

e

$$\beta_{2^{n-1}-1_{a_{imm}}} = \tan^{-1}\frac{a_{2^n-1}}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + ..a_{2^n-2}{}^2}} = \tan^{-1}\frac{a_{2^n-1}}{\sqrt{\sum_{h=1}^{2^n-2} a_h{}^2}}$$

rispettivamente nel piano $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + ..a_{2^n-3} i_{2^n-3}} I_{2^n-2}$ e perpendicolarmente al piano $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + ..a_{2^n-3} i_{2^n-3}} I_{2^n-2}$.

Come visto, il vettore $a_1 i_1 + a_2 i_2 + .....a_{2^n-1} i_{2^n-1}$ individuerà l'asse immaginario $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + ..a_{2^n-1} i_{2^n-1}} = I_{a_{imm}}$; a partire da $I^+{}_{a_{imm}}$, mediante una rotazione di angolo $-\pi/2$, perpendicolarmente al piano $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + ..a_{2^n-3} i_{2^n-3}} I_{2^n-2}$, avremo il semiasse positivo $R^+{}_{a_{imm}}$ dell'asse reale $R_{a_{imm}}$ del piano di Gauss $R_{a_{imm}} I_{a_{imm}}$, in cui potremo rappresentare gli ipercomplessi $a_0 + k(a_1 i_1 + a_2 i_2 + .....a_{2^n-1} i_{2^n-1}) \in C_{2^n-1} - R$, $\forall a_0 \in R$ e $\forall k \in R - \{0\}$.

Da quanto visto, la coppia di angoli ($\alpha_{h_{a_{imm}}}$ ; $\beta_{h_{a_{imm}}}$)

- se è $0 < h < 2^{n-1} - 1$, permette di individuare l'asse delle ascisse $I_{a_1 i_1 + ...a_{2h+1} i_{2h+1}}$ dello spazio tridimensionale

$I_{\sum_{k=1}^{2h+1} a_k i_k} I_{2h+2} I_{2h+3}$ ottenuto facendo ruotare il precedente spazio tridimensionale $I_{\sum_{k=1}^{2(h-1)+1} a_k i_k} I_{2(h-1)+2} I_{2(h-1)+3}$ in modo tale che il suo asse delle ascisse, con tale rotazione, vada a sovrapporsi a $I_{\sum_{k=1}^{2h+1} a_k i_k}$ (per $h=1$, come detto, in corrispondenza dello spazio tridimensionale di partenza $I_1 I_2 I_3$, è $I_1 \equiv I_{a_1 i_1}$);

- se è $h = 2^{n-1} - 1$, permette di individuare l'asse immaginario $I_{a_{imm}}$ del piano di Gauss in cui rappresentare gli ipercomplessi $a_0 + k(a_1 i_1 + a_2 i_2 + .....a_{2^n-1} i_{2^n-1}) \in C_{2^n-1} - R$ con $a_1 i_1 + a_2 i_2 + ....a_{2^n-1} i_{2^n-1} \in I_{2^n-1} - \{0\}$ fissato, $\forall a_0 \in R$ e $\forall k \in R - \{0\}$.

Generalizzando quanto visto nel paragrafo precedente per i quaternioni agli ipercomplessi di un qualunque insieme $C_{2^n-1} - R$ con $n > 1$, se la $2^n - 1\_pla$ $(a_1, a_2, .....a_{2^n-1}) \neq (0,0,...0)$, identificabile con l'ipercomplesso immaginario $a_1 i_1 + a_2 i_2 + .....a_{2^n-1} i_{2^n-1} \in I_{2^n-1} - \{0\}$ (a partire dal quale possiamo considerare la classe di equivalenza $k(a_1 i_1 + a_2 i_2 + .....a_{2^n-1} i_{2^n-1})$ con $k \in R - \{0\}$), ha le prime componenti $a_1, a_2, .....a_m$ nulle (con $m < 2^n - 1$, dato che $a_1 i_1 + a_2 i_2 + .....a_{2^n-1} i_{2^n-1} \in I_{2^n-1} - \{0\}$), sarà:

1.

- $\alpha_{h_{a_{imm}}} = \tan^{-1}(a_{2h} / \sqrt{\sum_{k=1}^{2h-1} a_k{}^2}) = \tan^{-1}(0/0)$

- $\beta_{h_{a_{imm}}} = \tan^{-1}(a_{2h+1} / \sqrt{\sum_{k=1}^{2h} a_k{}^2}) = \tan^{-1}(0/0)$

se è $2h < m$;

2.

- $\alpha_{h_{a_{imm}}} = \tan^{-1}(a_{2h} / \sqrt{\sum_{k=1}^{2h-1} a_k{}^2}) = \tan^{-1}(0/0)$

- $\beta_{h_{a_{imm}}} = \tan^{-1}(a_{2h+1} / \sqrt{\sum_{k=1}^{2h} a_k{}^2}) = \tan^{-1}(a_{2h+1}/0)$ con $a_{2h+1} > 0$

se è $2h = m$;

3.

- $\alpha_{h_{a_{imm}}} = \tan^{-1}(a_{2h} / \sqrt{\sum_{k=1}^{2h-1} a_k{}^2}) = \tan^{-1}(a_{2h}/0)$ con $a_{2h} > 0$

- $\beta_{h_{a_{imm}}} = \tan^{-1}(a_{2h+1} / \sqrt{\sum_{k=1}^{2h} a_k{}^2})$ con $\sum_{k=1}^{2h} a_k{}^2 \neq 0$

se è $2h = m + 1$.

(Ovviamente, se è $2h > m+1$, $\alpha_{h_{a_{imm}}}$ e $\beta_{h_{a_{imm}}}$ sono entrambi determinati essendo $\sum_{k=1}^{2h-1} a_k^{\ 2} \neq 0$ e $\sum_{k=1}^{2h} a_k^{\ 2} \neq 0$).

Come fatto per i quaternioni, ogni volta che ci troveremo di fronte al calcolo impossibile di $\tan^{-1}(a_{m+1}/0)$ con $a_{m+1} > 0$ porremo l'angolo corrispondente uguale a $\pi/2$.

Nel caso 1., risultando indeterminati gli angoli $\alpha_{h_{a_{imm}}}$ e $\beta_{h_{a_{imm}}}$, il nuovo spazio tridimensionale risulterà indeterminato nello spazio tridimensionale precedente (ovviamente con la stessa origine di questo).

Nel caso 2., risulterà $\alpha_{h_{a_{imm}}}$ indeterminato (nel piano $I_{\sum_{k=1}^{2(h-1)+1} a_k i_k} I_{2(h-1)+2}$) e $\beta_{h_{a_{imm}}} = \pi/2$ (perpendicolarmente al piano $I_{\sum_{k=1}^{2(h-1)+1} a_k i_k} I_{2(h-1)+2}$). Se è $h < 2^{n-1} - 1$, l'asse delle ascisse del nuovo spazio tridimensionale $I_{\sum_{k=1}^{2h+1} a_k i_k} I_{2h+2} I_{2h+3}$ sarà coincidente con l'asse delle quote $I_{2(h-1)+3}$ dello spazio precedente, mentre gli altri 2 assi (ovviamente perpendicolari e passanti per $O$) saranno indeterminati nel piano

$I_{2(h-1)+1 \atop \sum_{k=1} a_k i_k} I_{2(h-1)+2}$; se invece è $h = 2^{n-1} - 1$, l'asse immaginario $I_{a_{imm}}$ del piano di Gauss $R_{a_{imm}} I_{a_{imm}}$ in cui rappresentare gli ipercomplessi $a_0 + k(a_1 i_1 + a_2 i_2 + .....a_{2^n-1} i_{2^n-1}) \in C_{2^n-1} - R$ sarà coincidente con l'asse delle quote $I_{2(h-1)+3}$ dello spazio precedente, mentre l'asse reale di tale piano sarà indeterminato nel piano $I_{2(h-1)+1 \atop \sum_{k=1} a_k i_k} I_{2(h-1)+2}$, ovviamente passante per $O$.

Nel caso 3., risulterà $\alpha_{h_{a_{imm}}} = \pi/2$ e $\beta_{h_{a_{imm}}}$ determinato. Se è $h < 2^{n-1} - 1$, l'asse delle ascisse $I_{2h+1 \atop \sum_{k=1} a_k i_k}$ del nuovo riferimento tridimensionale $I_{2h+1 \atop \sum_{k=1} a_k i_k} I_{2h+2} I_{2h+3}$ sarà nel piano $I_{2(h-1)+2} I_{2(h-1)+3}$ delle ordinate e delle quote del precedente spazio tridimensionale; se invece è $h = 2^{n-1} - 1$, l'asse immaginario $I_{a_{imm}}$ del piano di Gauss $R_{a_{imm}} I_{a_{imm}}$ in cui rappresentare gli ipercomplessi $a_0 + k(a_1 i_1 + a_2 i_2 + .....a_{2^n-1} i_{2^n-1}) \in C_{2^n-1} - R$ sarà nel piano $I_{2(h-1)+2} I_{2(h-1)+3}$ delle ordinate e delle quote del precedente spazio tridimensionale e il semiasse positivo $R^+{}_{a_{imm}}$ dell'asse reale si otterrà dalla rotazione di angolo $-\pi/2$ di $I^+{}_{a_{imm}}$, sempre nel piano $I_{2(h-1)+2} I_{2(h-1)+3}$.

Come per i quaternioni, per ogni ipercomplesso immaginario $a_{imm} = a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... a_{2^n-1} i_{2^n-1} \neq 0$, l'ipercomplesso generico $a_0 + ka_1 i_1 + ka_2 i_2 + ... ka_{2^n-1} i_{2^n-1}$ con $a_0 \in R$ e $k \in R - \{0\}$ sarà rappresentato nel corrispondente piano di Gauss (esclusi i punti dell'asse reale):

- in forma cartesiana, dalla coppia

$$\left(a_0, \rho_{ka_{imm}}\right) = (a_0, k\rho_{a_{imm}}),$$

con

$$\rho_{ka_{imm}} = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2 + ...(ka_{2^n-1})^2} = k\sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + ... a_{2^n-1}^{\,2}} = k\rho_{a_{imm}}$$

e

- in forma polare, dalla coppia

$$\left(\rho_{a_0, ka_{imm}}, \gamma_{a_0, ka_{imm}}\right)$$

o, equivalentemente, nella forma trigonometrica

$$a_{a_0, ka_{imm}} = \rho_{a_0, ka_{imm}}\left(\cos\gamma_{a_0, ka_{imm}} + i_{a_{imm}} \sin\gamma_{a_0, ka_{imm}}\right),$$

con

$$\rho_{a_0, ka_{imm}} = \sqrt{a_0^{\,2} + (ka_1)^2 + (ka_2)^2 + ...(ka_{2^n-1})^2}$$

e

$$\gamma_{a_0, ka_{imm}} = \tan^{-1}\frac{\rho_{ka_{imm}}}{a_0} \text{ se } a_0 > 0 \text{ oppure } \gamma_{a_0, ka_{imm}} = \tan^{-1}\frac{\rho_{ka_{imm}}}{a_0} + \pi \text{ se } a_0 < 0.$$

Nella costruzione del piano di Gauss, in ogni spazio tridimensionale (come visto precedentemente) si possono individuare $\infty^2$ classi di equivalenza individuate dalla relazione $\mathscr{R}$ definita in esso, rappresentate dall'origine e dalle $\infty^2$ rette passanti per l'origine di tale spazio (private dell'origine stessa). Per l'insieme $C_7$, per arrivare a individuare tale piano, abbiamo considerato i 3 riferimenti tridimensionali $I_1 I_2 I_3$, $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3} I_4 I_5$ e $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + .. a_5 i_5} I_6 I_7$, quindi si avranno $\infty^2 \cdot \infty^2 \cdot \infty^2 = \infty^6$ classi di equivalenza e di conseguenza $\infty^2 \cdot \infty^2 \cdot \infty^2 = \infty^6$ piani di Gauss, in ognuno dei quali è possibile rappresentare una di tali classi e quindi $\infty^2$ elementi (pertanto in essi saranno rappresentati gli $\infty^6 \cdot \infty^2 = \infty^8$ elementi di $C_7 - R$).

Per un generico insieme ipercomplesso $C_{2^n - 1}$, si procederà nella costruzione di ogni piano di Gauss in modo analogo a come visto per gli ottonioni; quindi si avranno $\infty^2 \cdot \infty^2 \cdot ... \infty^2 = \infty^{2^n - 2} = \infty^{2(2^{n-1} - 1)}$ classi di equivalenza e di conseguenza $\infty^2 \cdot \infty^2 \cdot ... \infty^2 = \infty^{2^n - 2} = \infty^{2(2^{n-1} - 1)}$ piani di Gauss in ognuno dei quali è possibile rappresentare una di tali classi (pertanto in essi saranno rappresentati gli $\infty^{2^n - 2} \cdot \infty^2 = \infty^{2^n}$ elementi di $C_{2^n - 1} - R$).

Come visto nel paragrafo precedente per i quaternioni, l'ipercomplesso immaginario $a_{imm} = a_1 i_1 + a_2 i_2 + .... + a_{2^n-1} i_{2^n-1} \neq 0$ si può pensare ottenuto applicando:

- nello spazio $I_1 I_2 I_3$ al vettore $(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, 0, 0)$ le 2 rotazioni successive, individuate dagli angoli

$$\alpha_{1_{a_{imm}}} = \tan^{-1} \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2}} = \tan^{-1} \frac{a_2}{a_1}$$

  e

$$\beta_{1_{a_{imm}}} = \tan^{-1} \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

  rispettivamente nel piano $I_1 I_2$ e perpendicolarmente al piano $I_1 I_2$;

- nello spazio $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3} I_4 I_5$ al vettore $(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... a_5^2}, 0, 0)$ le 2 rotazioni successive, individuate dagli angoli

$$\alpha_{2_{a_{imm}}} = \tan^{-1} \frac{a_4}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

  e

$$\beta_{2_{a_{imm}}} = \tan^{-1} \frac{a_5}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}$$

rispettivamente nel piano $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3} I_4$ e perpendicolarmente al piano $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3} I_4$;

……….

……….

- nello spazio $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 ... + a_{2^n -3} i_{2^n -3}} I_{2^n -2} I_{2^n -1}$ al vettore $(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... a_{2^n -1}^2}, 0, 0)$ le 2 rotazioni successive, individuate dagli angoli

$$\alpha_{2^{n-1}-1_{a_{imm}}} = \tan^{-1} \frac{a_{2^n -2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + .... a_{2^n -3}^2}}$$

e

$$\beta_{2^{n-1}-1_{a_{imm}}} = \tan^{-1} \frac{a_{2^n -1}}{\sqrt{a_1^2 + .... a_{2^n -2}^2}}$$

rispettivamente nel piano $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 ... + a_{2^n -3} i_{2^n -3}} I_{2^n -2}$ e perpendicolarmente al piano $I_{a_1 i_1 + a_2 i_2 ... + a_{2^n -3} i_{2^n -3}} I_{2^n -2}$.

Nel paragrafo precedente abbiamo visto come il piano di Gauss in cui possiamo rappresentare il quaternione non reale $b$ (e gli altri della stessa classe di equivalenza) si possa ottenere dal piano di Gauss in cui possiamo rappresentare il quaternione non reale $a$ (e gli altri della stessa classe di equivalenza), facendo ruotare quest'ultimo piano intorno all'origine $O$ di $\alpha_{b_{imm}} - \alpha_{a_{imm}}$ parallelamente al piano $I_1 I_2$ e, a seguire, di $\beta_{b_{imm}} - \beta_{a_{imm}}$ perpendicolarmente al piano $I_1 I_2$.

Ovviamente non potremo procedere allo stesso modo per due ipercomplessi $a$ e $b$ appartenenti a $C_{2^n-1} - R$ con $n > 2$ dato che i due piani di Gauss, in cui essi potranno essere rappresentati, in generale, sono individuati in 2 diversi riferimenti tridimensionali.

Vedremo di seguito come, a partire da $a_{imm}$, mediante le rotazioni di riferimenti tridimensionali e infine di un piano nello spazio ottenuto dopo l'ultima di tali rotazioni (coincidente con lo spazio $I_{\sum_{h=1}^{2^n-3} b_h i_h} I_{2^n-2} I_{2^n-1}$), potremo arrivare al piano di Gauss $R_{b_{imm}} I_{b_{imm}}$ in cui rappresentare l'intera classe di equivalenza $b_0 + k(b_1 i_1 + b_2 i_2 + \ldots b_{2^n-1} i_{2^n-1})$ $\forall b_0 \in R$ e $\forall k \in R - \{0\}$.

Nel riferimento $I_1 I_2 I_3$, consideriamo i 2 vettori $(a_1, a_2, a_3)$ e $(b_1, b_2, b_3)$ che individuano rispettivamente, come visto in precedenza, gli assi delle ascisse dei 2 riferimenti tridimensionali $I_{\sum_{h=1}^{3} a_h i_h} I_4 I_5$ e $I_{\sum_{h=1}^{3} b_h i_h} I_4 I_5$ (nei quali, come sottolineato precedentemente, continuiamo a chiamare allo stesso modo gli assi $I_4$ e $I_5$ anche se, dipendendo dai vettori $(a_1, a_2, a_3)$ e $(b_1, b_2, b_3)$, in generale, non coincidono), che si ottengono facendo ruotare $I_1 I_2 I_3$ rispettivamente di $\alpha_{1_{a_{imm}}}$ e, a seguire, di $\beta_{1_{a_{imm}}}$ e di $\alpha_{1_{b_{imm}}}$ e, a seguire, di $\beta_{1_{b_{imm}}}$ (con, in entrambi i casi, la prima rotazione parallelamente al piano $I_1 I_2$ e la seconda perpendicolarmente al piano $I_1 I_2$); facendo ruotare ora il riferimento che si ottiene a partire da $(a_1, a_2, a_3)$ di $\alpha_{1_{b_{imm}}} - \alpha_{1_{a_{imm}}}$ e, a seguire, di $\beta_{1_{b_{imm}}} - \beta_{1_{a_{imm}}}$, questo si sovrappone al riferimento $I_{\sum_{h=1}^{3} b_h i_h} I_4 I_5$ che si ottiene a partire dal vettore $(b_1, b_2, b_3)$.

Come fatto nel riferimento $I_1 I_2 I_3$, nel riferimento $I_{\sum_{h=1}^{3} b_h i_h} I_4 I_5$ consideriamo i 2 vettori $(\sqrt{\sum_{h=1}^{3} a_h^{\ 2}}, a_4, a_5)$ e $(\sqrt{\sum_{h=1}^{3} b_h^{\ 2}}, b_4, b_5)$, che individuano rispettivamente, come visto in precedenza, gli assi delle ascisse di 2 riferimenti tridimensionali che si ottengono facendo ruotare $I_{\sum_{h=1}^{3} b_h i_h} I_4 I_5$ rispettivamente di $\alpha_{2_{a_{imm}}}$ e, a seguire, di $\beta_{2_{a_{imm}}}$ e di $\alpha_{2_{b_{imm}}}$ e, a seguire, di $\beta_{2_{b_{imm}}}$ (con, in entrambi i casi, la prima rotazione parallelamente al piano $I_{\sum_{h=1}^{3} b_h i_h} I_4$ e la seconda perpendicolarmente al piano $I_{\sum_{h=1}^{3} b_h i_h} I_4$);

facendo ruotare il riferimento che si ottiene a partire dal vettore $(\sqrt{\sum_{h=1}^{3} a_h^{\ 2}}, a_4, a_5)$ di $\alpha_{2_{b_{imm}}} - \alpha_{2_{a_{imm}}}$ e, a seguire, di $\beta_{2_{b_{imm}}} - \beta_{2_{a_{imm}}}$, questo si sovrappone al riferimento $I_{\sum_{h=1}^{5} b_h i_h} \; I_6 I_7$ che si ottiene a partire dal vettore $(\sqrt{\sum_{h=1}^{3} b_h^{\ 2}}, b_4, b_5)$.

Continuando così, si arriva infine al riferimento $I_{\sum_{h=1}^{2^n-3} b_h i_h} \; I_{2^n-2} I_{2^n-1}$, in cui si possono rappresentare i 2 vettori $(\sqrt{\sum_{h=1}^{2^n-3} a_h^{\ 2}}, a_{2^n-2}, a_{2^n-1})$ e $(\sqrt{\sum_{h=1}^{2^n-3} b_h^{\ 2}}, b_{2^n-2}, b_{2^n-1})$ che individuano 2 assi $I'_{a_{imm}}$ e $I_{b_{imm}}$ il secondo dei quali è l'asse immaginario del piano di Gauss $R_{b_{imm}} I_{b_{imm}}$ in cui è possibile rappresentare $b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + \dots b_{2^n-1} i_{2^n-1}$, con parte immaginaria non nulla, e l'intera classe di equivalenza $b_0 + k(b_1 i_1 + b_2 i_2 + \dots b_{2^n-1} i_{2^n-1})$ $\forall b_0 \in R$ e $\forall k \in R - \{0\}$).

Il primo invece non è l'asse immaginario del piano di Gauss $R_{a_{imm}} I_{a_{imm}}$ in cui poter rappresentare $a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots a_{2^n-1} i_{2^n-1}$, con parte immaginaria non nulla, e l'intera classe di equivalenza

$a_0 + k(a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... a_{2^n -1} i_{2^n -1})$ $\forall a_0 \in R$ e $\forall k \in R - \{0\}$), ma l'asse immaginario di un piano $R'_{a_{imm}} I'_{a_{imm}}$ (con $R'_{a_{imm}}$ ottenuto sempre dalla rotazione dell'asse $I'_{a_{imm}}$ di $-\pi/2$ perpendicolarmente al piano $I_{\sum_{h=1}^{2^n-3} b_h i_h} I_{2^n-2}$); facendo ruotare $R'_{a_{imm}} I'_{a_{imm}}$ di $\alpha_{2^{n-1}-1_{b_{imm}}} - \alpha_{2^{n-1}-1_{a_{imm}}}$ (parallelamente al piano $I_{\sum_{h=1}^{2^n-3} b_h i_h} I_{2^n-2}$) e, a seguire, di $\beta_{2^{n-1}-1_{b_{imm}}} - \beta_{2^{n-1}-1_{a_{imm}}}$ (perpendicolarmente al piano $I_{\sum_{h=1}^{2^n-3} b_h i_h} I_{2^n-2}$), il piano $R'_{a_{imm}} I'_{a_{imm}}$ si sovrappone al piano $R_{b_{imm}} I_{b_{imm}}$.

Come visto per i quaternioni, nel caso in cui uno dei 2 piani $R'_{a_{imm}} I'_{a_{imm}}$ e $R_{b_{imm}} I_{b_{imm}}$ abbia asse immaginario $I'_{a_{imm}}$ o $I_{b_{imm}}$ coincidente rispettivamente con l'asse $I_{b_{imm}\,2^n-1}$ delle quote del riferimento $I_{\sum_{h=1}^{2^n-3} b_h i_h} I_{b_{imm}\,2^n-2} I_{b_{imm}\,2^n-1}$, per quanto visto precedentemente, il corrispondente angolo $\alpha_{2^{n-1}-1_{a_{imm}}}$ o $\alpha_{2^{n-1}-1_{b_{imm}}}$ sarà indeterminato (nel piano $I_{\sum_{h=1}^{2^n-3} b_h i_h} I_{b_{imm}\,2^n-2}$) e pertanto potrà supporsi $\alpha_{2^{n-1}-1_{b_{imm}}} = \alpha_{2^{n-1}-1_{a_{imm}}}$ da cui $\alpha_{2^{n-1}-1_{b_{imm}}} - \alpha_{2^{n-1}-1_{a_{imm}}} = 0$.

Ovviamente, nel caso in cui sia $b\,\mathcal{R}_{C_{2^n-1}}\,a$, sarà $\alpha_{h_{b_{imm}}}-\alpha_{h_{a_{imm}}}=\beta_{h_{b_{imm}}}-\beta_{h_{a_{imm}}}=0$, $\forall h=1,2,\ldots 2^{n-1}-1$.

In ognuno degli $\infty^2$ piani di Gauss in cui si possono rappresentare i quaternioni non reali, così come in generale in ognuno degli $\infty^{2^n-2}$ piani di Gauss in cui si possono rappresentare gli elementi non reali di un qualunque insieme ipercomplesso $C_{2^n-1}$, il prodotto è commutativo e sono verificate anche tutte le altre proprietà formali delle operazioni tra numeri complessi (quindi, $C_3$ può essere pensato come unione dell'insieme reale e di $\infty^2$ insiemi $C_1-R$ e, in generale, un qualunque insieme ipercomplesso $C_{2^n-1}$ può essere pensato come unione dell'insieme reale e di $\infty^{2^n-2}$ insiemi $C_1-R$).

Pertanto, in tale rappresentazione, per i quaternioni appartenenti alla stessa classe di equivalenza, e in generale per gli elementi di qualunque insieme ipercomplesso appartenenti alla stessa classe di equivalenza (così come ovviamente tra ipercomplessi con parte immaginaria nulla, quindi numeri reali, e ipercomplessi qualsiasi), potremo operare come con i numeri complessi.

# I QUATERNIONI E IN GENERALE GLI IPERCOMPLESSI PARTENDO DALLA FORMULA DI CAYLEY–DICKSON

Il testo introduce in maniera unitaria gli insiemi successivi a quello dei numeri reali, costruendo gli elementi di tali insiemi mediante la formula di Cayley–Dickson, in modo che, ampliando opportunamente la definizione di ricorsività, potrà essere considerato ricorsivo. Analizza quindi, prima per i quaternioni e poi in generale per qualunque insieme ipercomplesso, le quattro operazioni fondamentali, evidenziando in particolare come quanto ottenuto per il prodotto di ipercomplessi immaginari permetta di superare l'apparente incongruenza tra il prodotto di due unità immaginarie uguali e il prodotto di due unità immaginarie diverse, e di definire il prodotto e il quoziente di due vettori. Affronta poi la questione della non validità, a partire dai quaternioni, del principio di permanenza delle proprietà formali di Hankel e ridefinisce le condizioni alla base della costruzione degli ampliamenti numerici; con tale ridefinizione dei criteri da rispettare, ogni insieme ipercomplesso potrà ancora essere considerato un ampliamento degli insiemi numerici precedenti. Infine, prima per i quaternioni e poi in generale per ogni insieme ipercomplesso, descrive come è possibile ottenere una partizione di tali insiemi nell'insieme R dei numeri reali, rappresentabile ovviamente su una retta, e in infiniti altri insiemi rappresentabili in piani di Gauss privati dei punti degli assi reali (ruotati l'uno rispetto all'altro intorno all'origine *O*); in ognuno di tali infiniti sottoinsiemi continueranno a valere tutte le proprietà formali delle operazioni valide nell'insieme $C_1$ dei numeri complessi e pertanto si potrà operare come si opera in tale insieme.

## CARMEN **CARANO**

Ha pubblicato, sul «Periodico di Matematiche» della Mathesis, gli articoli: *Una spirale logaritmica aurea* (2004), *La successione di Fibonacci, il numero aureo, la spirale logaritmica aurea* (2005), *Spirali logaritmiche tridimensionali* (2006), *Sulle serie armoniche generalizzate* (2008), *Sulle serie alternate* (2009) (pubblicati nel 2017, in *open access*, da Ledizioni) e, con Aracne editrice, i testi: *Logaritmi e potenze nell'insieme dei numeri complessi* (2018), *Sulle funzioni iperboliche* (2019) e *Sul principio di Hankel nell'insieme dei numeri complessi e altri articoli* (2021), che contiene anche gli articoli pubblicati tra il 2004 e il 2009 sul «Periodico di Matematiche».

*in copertina*
*Cayley Q8 graph of quaternion multiplication*
(Wikipedia/Cmglee)

ISBN 979-12-218-1891-8
9 791221 818918