aracne

NUNZIA ANTONIETTA D’AURIA
LINA MALLOZZI

ESERCITAZIONI DI METODI MATEMATICI PER L’INGEGNERIA

EXERCISES OF MATHEMATICAL METHODS FOR ENGINEERING

aracne

aracne

ISBN
979-12-80414-30-4

PRIMA EDIZIONE
ROMA 8 MARZO 2021

Indice

Introduzione

Le schede a tema presenti in questa raccolta sono di supporto al corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria da 6CFU per il CdS in Ingegneria Elettrica e da 9CFU per i CdS in Ingegneria dell'Automazione, Biomedica, Elettronica, Informatica, delle Telecomunicazioni dell' Università di Napoli Federico II. Si tratta di esercizi mirati che seguono la teoria presentata durante le lezioni offrendo allo studente la possibilità di applicare i vari concetti spiegati. Dopo le schede guidate, si trovano alcuni testi di esame, di prove intercorso, di tests a risposta multipla con una sola risposta corretta. In maniera del tutto analoga, le schede scritte in inglese sono di supporto al corso di Mathematical Methods for Engineering per il Corso di Studi in Mathematical Engineering (in inglese) dell' Università di Napoli Federico II, seguite da alcuni test di esame per il corso.

Le appendici riportano le principali formule utili per gli esercizi. Nella lista dei riferimenti bibliografici sono riportati tutti i testi di supporto per la parte teorica sia del corso in italiano, sia di quello in inglese.

Introduction

The exsercise sheets in this collection support the course of Mathematical Methods for Engineering of 6CFU for the CdS in Electrical Engineering and of 9CFU for the CdS in Automation, Biomedical, Electronics, Informatics, Telecommunications Engineering of the University of Naples Federico II. These are targeted exercises that follow the theory presented during the lessons, offering the student the opportunity to apply the various concepts explained. After the exsercise sheets, there are some exam texts, some midterms, some multiple choice tests with one correct answer.

In a completely similar way, the exsercise sheets written in English support the Mathematical Methods for Engineering course for the Mathematical Engineering Course (in English) of the Federico II University of Naples, followed by some exam tests for the course.

The appendices show the main useful formulas for the exercises. The list of bibliographic references contains all the supporting texts for the theoretical part of both the Italian and the English course.

NOTAZIONI/NOTATIONS

$\mathbb{C}$ campo dei numeri complessi/ complex number field

$\boldsymbol{j}$ unità immaginaria/ imaginary unit

$\boldsymbol{Re\ z}$ parte reale di $\boldsymbol{z}$/real part of $\boldsymbol{z}$

$\boldsymbol{Im\ z}$ coefficiente dell'immaginario di $\boldsymbol{z}$/ coefficient of the immaginary part of $\boldsymbol{z}$

$\boldsymbol{arg\ z}$ argomento di z/ argument of z

$\boldsymbol{Arg\ z}$ argomento principale di z/ principal argument of z

$\bar{z}$ coniugato di $\boldsymbol{z}$/ conjugate of $\boldsymbol{z}$

$\boldsymbol{\mathcal{L}}[\cdot]$ trasformazione bilatera di Laplace/ two-sided Laplace transform

$\boldsymbol{\mathcal{L}_u}[\cdot]$ trasformazione unilatera di Laplace/ one-sided Laplace transform

$\boldsymbol{\mathcal{F}}[\cdot]$ trasformazione di Fourier/ Fourier transform

$\boldsymbol{\mathcal{Z}}[\cdot]$ trasformazione Zeta/ Zeta transform

$\mathring{\boldsymbol{A}}$ interno dell'insieme A/ interior of the set A

$\boldsymbol{\Pi_a(t-c)}$ impulso rettangolare di ampiezza a centrato in c/ rectangular pulse signal of length a centred at c

ROC Region Of Convergence

Capitolo 1

Schede guida per esercitazioni

SCHEDA 1 - Numeri complessi.

1) Calcolare modulo e argomento di $a)\big(1-\frac{1}{j}\big)e^{\pi}$; $\quad b)\frac{(1+j)^2\overline{(\sqrt{2}+\sqrt{2}j)}}{(1+j\sqrt{3})^3}$.

Risultati a) $\sqrt{2}e^{\pi}, \frac{\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$; *b)* $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\pi+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

2) Calcolare $a)\ (-1)^j$; $\quad b)\ \sqrt[4]{-4}$; $\quad c)\ \sqrt[3]{(1-j)^3}$; $\quad d)\ \sqrt{-2-2\sqrt{3}j}$.

R. a) $e^{-\pi+2k\pi}(k\in\mathbb{Z})$; *b)* $\pm1+j, 1\pm j$; *c)* $1-j, \sqrt{2}e^{j\frac{5}{12}\pi}, \sqrt{2}e^{j\frac{13}{12}\pi}$; *d)* $-1+\sqrt{3}j, 1-\sqrt{3}j$.

3) Scrivere in forma algebrica i numeri

$$a)\ e^{j\frac{\pi}{2}};\quad b)\ e^{3j};\quad c)\ j+e^{2\pi j};\quad d)\ \frac{1-e^{j\frac{\pi}{4}}}{1+e^{j\frac{\pi}{4}}}.$$

R. a) j; *b)* $\cos 3+j\sin 3$; *c)* $1+j$; *d)* $\frac{-j}{1+\sqrt{2}}$.

4) Scrivere in forma esponenziale i numeri

$$a)\ -3+3j;\quad b)\ j^7-j^{23};\quad c)\ \Big(\frac{1+j}{1-j}\Big)^7;\quad d)\ \Big(\frac{2j}{3+j\sqrt{3}}\Big)^4.$$

R. a) $3\sqrt{2}e^{j\frac{3}{4}\pi}$; *b)* $\nexists$; *c)* $e^{-\frac{\pi}{2}}$; *d)* $\frac{1}{9}e^{j\frac{2}{3}\pi}$.

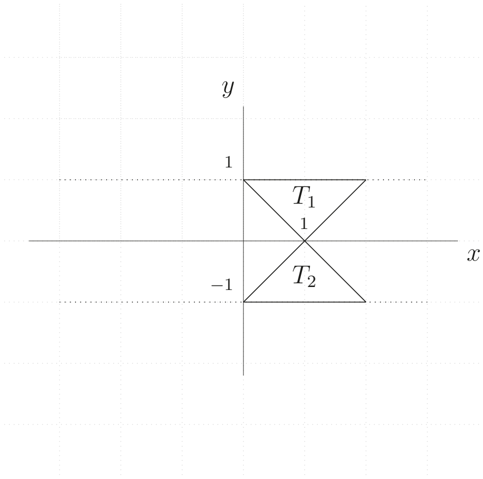
5) Calcolare $Arg\left(\frac{6\sqrt{3}-j6}{-2-2j}e^{1-j\frac{\pi}{4}}\right)$.

R. $\frac{\pi}{3}$.

6) Disegnare nel piano di Gauss l'insieme

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - Re(z)| < 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} : \frac{3\pi}{4} > |Arg(z-1)| > \frac{\pi}{4}\}.$$

R. $\mathring{T}_1 \cup \mathring{T}_2$



7) Risolvere le seguenti equazioni nel campo dei numeri complessi:

$$a)|z+1|^2 = 3\bar{z} - |z|^2; \qquad b)|z+2j| = z - 2\bar{z};$$

$$c)|z-1| - \bar{z} = j; \qquad d)z^2 + (1-j)z - j = 0.$$

R. a) $\emptyset$; *b)* $\emptyset$; *c)* $1+j$; *d)* $-1, j$.

SCHEDA 2 - **Funzioni olomorfe; singolarità e integrali.**

1) Calcolare:

$$a)\log(-j);\quad b)1^j;\quad c)\log(1+j\sqrt{2});\quad d)(-1)^j;\ e)Re(\log(1-j));\quad f)Im(e^{-j});$$

$$g)Re(2^j);\quad h)\sin\Big(\frac{\pi}{2}-j\log^* 2\Big);\quad i)\sum_{k=1}^{100} j^k;\quad l)Im(\log(3j)).$$

($\log^* x$ denota la funzione logaritmo reale).

R. a) $j(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)(k\in\mathbb{Z})$; *b)* $e^{2k\pi}(k\in\mathbb{Z})$; *c)* $\log^*\sqrt{3}+j(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}+2k\pi)(k\in\mathbb{Z})$; *d)* $e^{-\pi+2k\pi}(k\in\mathbb{Z})$; *e)* $\log^*\sqrt{2}$; *f)* $-\sin 1$; *g)* $e^{2k\pi}\cos(\log^* 2)(k\in\mathbb{Z})$; *h)* $\frac{5}{4}$; *i)* 0; *l)* $\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

2) Stabilire se la funzione $f(z)=(\bar{z})^2+2j$ è olomorfa in $\mathbb{C}$.

R. No.

3) Scrivere lo sviluppo di Taylor della funzione $f(z)=\frac{1}{1-2z}$ intorno a 0 e precisare il raggio di convergenza.

R. $\sum_{k=0}^{+\infty}2^k z^k$, $\rho=\frac{1}{2}$.

4) Determinare, precisandone l'ordine, gli zeri delle funzioni:

$$f_1(z) = e^{2z} - 1, \quad f_2(z) = 1 + \cos 2jz$$

$$f_3(z) = z \sin z, \quad f_4(z) = (1 - \cos(jz))(e^z - 1).$$

R. $z_1 = k\pi j (k \in \mathbb{Z})$ *ord. 1,* $z_2 = \frac{\pi}{2j} + \frac{k\pi}{j} (k \in \mathbb{Z})$ *ord. 2,* $z_3 = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ *per* $k \neq 0$ *ord. 1 e per* $k = 0$ *ord. 2,* $z_4 = 2k\pi j (k \in \mathbb{Z})$ *ord. 3.*

5) Sia data la funzione $f(z) = \dfrac{1}{(z-3)^2} + \dfrac{z}{(z+3)^4}$.

a. Stabilire per quali $z \in \mathbb{C}$ è olomorfa;

b. classificare i punti di singolarità isolata al finito;

c. classificare z_∞;

d. descrivere gli sviluppi di Laurent intorno ai punti di singolarità isolata al finito precisandone la corona circolare di convergenza.

R. a. $z \in \mathbb{C}, z \neq \pm 3$, *b.* $z = 3$ *polo ord. 2 e* $z = -3$ *polo ord. 4, c.* z_∞ *zero ord. 2, d.* $\sum_{k=-2}^{+\infty} c_k (z-3)^k$ *in* $0 < |z-3| < 6$ *e* $\sum_{k=-4}^{+\infty} c_k (z+3)^k$ *in* $0 < |z+3| < 6$.

6) Classificare i punti di singolarità isolata al finito di:

$$f_1(z) = \frac{1 - \sin(\pi j z)}{4z^2 - 1}, \quad f_2(z) = \frac{e^{z+j}}{z^2 - 2z + 2}.$$

R. $z_1 = \pm \frac{1}{2}$ *poli ord. 1,* $z_2 = 1 \pm j$ *poli ord. 1.*

7) Calcolare

$$a) \int_{|z|=1} \frac{e^{z+1}}{(z-3)^4}\, dz, \quad b) \int_{|z-\frac{\pi}{2}|=5} \frac{1-\cos z}{z^3 \sin z}\, dz.$$

R. a) 0, *b)* 0.

8) Calcolare

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2 - j}\, dz$$

dove $\gamma = \partial\{z \in \mathbb{C} : 0 \le |z| \le 2, -\frac{\pi}{2} \le Arg z \le 0\}$.

R. 0.

9) Calcolare

$$\int_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{4z^2 - 17z + 4}\, dz$$

dove γ è la frontiera del triangolo di vertici $z_1 = 1, z_2 = j, z_3 = -j$.

R. $-\pi j \frac{\sqrt{2}}{15}$.

10) Calcolare

$$a) \int_{|z+j|=1/2} \frac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{z^3(z+j)}\, dz \quad b) \int_{|z|=2} \frac{1-\sin(\pi z j)}{4z^2-1}\, dz.$$

R. a) $2\pi e$, *b)* $-\pi j \sin(j\frac{\pi}{2})$.

SCHEDA 3 - Z-Trasformata e $\mathcal{L}$-trasformata.

1) Calcolare le seguenti Z-trasformate:

$$a)\ Z[(-2)^n u(n-1)]; b) Z[ne^{n+1}u(n-1)]; \quad c) Z[n3^n \sin\big(\frac{\pi}{6}n\big)u(n)].$$

R. a) $\frac{-2}{z+2}$, *b)* $\frac{e^2}{(z-e)^2}$, *c)* $-z\frac{d}{dz}\frac{6}{(2z-3\sqrt{3})^2+9}$.

2) Calcolare le seguenti Z-trasformate inverse:

$$a)\ Z^{-1}\left[\frac{1}{z(2z+1)}\right]; \quad b) Z^{-1}\left[\frac{z^2+2z}{(z+3)(z-4)}\right]; \quad c) Z^{-1}\left[\frac{z^3}{(z-2)^3}\right].$$

R. a) $\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^{n-2}u(n-2)$, *b)* $\frac{1}{7}[(-3)^n + 6(4)^n]u(n)$, *c)* $(n+2)(n+1)2^{n-1}u(n)$.

3) Risolvere le seguenti equazioni ricorrenti:

$$a) \begin{cases} y_{n+2} + 9y_n = 13\ (2^{n-2})\ u(n) \\ y_0 = 1, y_1 = 2 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 2y_{n+2} + y_{n+1} = u(n-3) \\ y_0 = 0, y_1 = -1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2y_{n+3} - 3y_{n+2} + y_n = 0 \\ y_0 = 1, y_1 = 1, y_2 = -4 \end{cases}$$

R. a) $u(n)[(2)^{n-2} + \frac{3}{4}(3)^n \cos(n\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}(3)^n \sin(n\frac{\pi}{2})]$, *b)* $\frac{u(n-4)}{3}(1-(-\frac{1}{2})^{n-4}) - (-\frac{1}{2})^{n-1}u(n-$ $1)$, *c)* $\frac{1}{18}[58 - 60n - 40(-\frac{1}{2})^n]u(n)$.

4) Calcolare le seguenti $\mathcal{L}$-trasformate:

$$a)\ \mathcal{L}[e^{-2t}u(t)];\quad b)\mathcal{L}[u(t)\cos 2t];\quad c)\mathcal{L}[u(t)e^{t}\sin 3t];$$

$$d)\ \mathcal{L}[e^{t+1}u(t-1)];\quad e)\mathcal{L}[(t+1)u(t)\sin 2t];\quad f)\mathcal{L}[(2-|t|)\Pi_4(t)].$$

R. a) $\frac{1}{s+2}$, b) $\frac{s}{s^2+4}$, c) $\frac{3}{(s-1)^2+9}$, d) $\frac{e^{2-s}}{s-1}$, e) $\frac{4s}{(s^2+4)^2}+\frac{2}{s^2+4}$, f) $\frac{4\sinh^2 s}{s^2}$.

5) Calcolare le seguenti $\mathcal{L}$-trasformate inverse:

$$a)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+1}{s^3-s}\right];\quad b)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}(s+2)}{s(s^2+16)}\right];\quad c)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s^2-3s+2}\right];$$

$$d)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2-2s+10}\right];\quad e)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{s^3(s+1)}\right].$$

R. a) $u(t)[-1+\frac{3}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t}]$, b) $u(t-\pi)[\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 4t+\frac{1}{4}\sin 4t]$, c) $u(t-\pi)[-e^{(t-\pi)}+e^{2(t-\pi)}]$, d) $u(t)[e^t\cos 3t+e^t\frac{2}{3}\sin 3t]$, e) $u(t)[2e^{-t}-2+2t-\frac{t^2}{2}]$.

6) Risolvere in $[0,+\infty[$ i seguenti problemi di Cauchy, specificando l'evoluzione forzata:

$$a)\begin{cases} y''+y=tu(t) \\ y(0)=0, y'(0)=0 \end{cases}\qquad b)\begin{cases} 2y''+y'=u(t-\pi) \\ y(0)=-1, y'(0)=1 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} y''+2y'+y=[u(t)-u(t-1)]e^{-t} \\ y(0)=1, y'(0)=0 \end{cases}$$

R. *a)* $u(t)[t - \sin t]$, *b)* $u(t)[1 - 2e^{-\frac{t}{2}}] + u(t - \pi)[-2 + t - \pi + 2e^{-\frac{t-\pi}{2}}]$, *c)* $e^{-t}[u(t)(1 + t + \frac{t^2}{2}) - u(t-1)\frac{(t-1)^2}{2}]$.