aracne

ROBERTO CAIMMI

GIOVANNI CARRARO

IL VOLANO RIGIDO BILANCIATO

DETERMINAZIONE EMPIRICA DEL MOMENTO DI INERZIA E DEL COEFFICIENTE DI SCABROSITÀ

aracne

aracne

ISBN
979–12–5994–931–8

PRIMA EDIZIONE
ROMA 1 GIUGNO 2022

Indice

Appendice

Capitolo I

Introduzione

L'utilizzo del volano rigido bilanciato[1] per la determinazione empirica del momento di inerzia e del coefficiente di scabrosità, presso i laboratori delle Università e degli Istituti Tecnici Industriali e Professionali, è di così lunga data da rendere superfluo qualsiasi ulteriore cenno al riguardo. Viceversa, uno studio dettagliato sull'equazione del moto, un'analisi approfondita della propagazione degli errori, e una discussione accurata sulle verifiche effettuate, hanno ricevuto scarsa considerazione a causa di una maggiore complessità del problema. Tali argomenti, tuttavia, ci sembrano inevitabili ai fini di una trattazione globale, e costituiscono lo scopo della presente ricerca.

Le motivazioni esposte impongono di ridurre al minimo indispensabile le considerazioni già ampiamente sfruttate per la determinazione empirica del momento di inerzia e del coefficiente di scabrosità, e al contrario di dare ampio risalto a tutto quanto, molto meno dibattuto, concerne l'utilizzo della formula di propagazione degli errori e la soluzione del problema della misura, in relazione alle grandezze fisiche di interesse.

Gli argomenti dei prossimi paragrafi saranno, nell'ordine: scopo dell'esperienza; moto circolare uniformemente accelerato; apparato sperimentale; equazione del moto; soluzione del problema della misura per l'accelerazione angolare: numero di giri fissato; soluzione del problema della misura per l'accelerazione angolare: totalità del numero di giri; verifica grafica sul piano logaritmico; calcolo del momento di inerzia e del coefficiente di scabrosità. Finalmente, la conclusione compendia i risultati di maggior rilievo. Una derivazione dettagliata del momento di inerzia del volano e del coefficiente di scabrosità è

1. In questa sede, un corpo rigido vincolato a ruotare intorno a un asse si dice bilanciato quando il baricentro del corpo giace sull'asse stesso.

riportata in Appendice A. Una galleria fotografica che ritrae gli aspetti essenziali della strumentazione è presentata in Appendice B.

La ricerca corrente costituisce una versione migliorata di due precedenti pubblicazioni sull'argomento, citate nella bibliografia. Le modifiche apportate, oltre ad analizzare nel dettaglio la soluzione del problema della misura per l'accelerazione angolare e a precisare i limiti di applicabilità della formula di propagazione degli errori, chiarificano l'esposizione e perfezionano alcuni calcoli, oltre a correggere le inevitabili sviste in sede di stampa.

Capitolo II

Scopo dell'esperienza

L'esperienza è finalizzata alla determinazione del momento di inerzia di un volano rigido bilanciato e del coefficiente di scabrosità, dove la rotazione avviene sotto l'azione di un momento di forza dapprima motore e successivamente passivo. Al riguardo, si procede attraverso i passaggi seguenti.

a) Moto circolare uniformemente accelerato.
b) Equazione del moto.
c) Soluzione del problema della misura per l'accelerazione angolare, a numero di giri fissato.
d) Soluzione del problema della misura per l'accelerazione angolare, per la totalità dei giri effettuati.
e) Verifica grafica sul piano logaritmico.
f) Calcolo del momento di inerzia.
g) Calcolo del coefficiente di scabrosità.

I punti menzionati saranno trattati nei capitoli successivi.

Capitolo III

Moto circolare uniformemente accelerato

Da un punto di vista cinematico, il moto circolare uniformemente accelerato comporta una dipendenza dello spazio percorso dal tempo trascorso[1] di tipo parabolico:

$$\theta = \theta_0 + \upsilon_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 \quad ; \qquad (3.1)$$

dove θ denota lo spazio percorso[2], t il tempo trascorso, υ la velocità angolare, α l'accelerazione angolare, e l' indice, 0, lo stato iniziale[3]. Ci si limita a considerare i soli moduli in quanto nelle condizioni considerate, con un'opportuna scelta del sistema di riferimento, l'equazione vettoriale del moto si riduce alla sua controparte scalare.

1. Preferiamo riferirci ai termini "spazio percorso" e "tempo trascorso" anziché ai termini "spazio" e "tempo" per una duplice ragione: in primo luogo, intendiamo i concetti di spazio e di tempo alla stregua di aspetti o proprietà del cosmo e non dei suoi costituenti; in secondo luogo, ogni considerazione cinematica o dinamica ha senso soltanto se riferita ad un sistema di assi arbitrario ma prefissato, tale da esprimere ogni punto del *continuum* spazio-temporale per mezzo di quattro coordinate: tre spaziali, riconducibili allo spazio percorso, e una temporale, riconducibile al tempo trascorso.

2. Per brevità, in tutto il testo lo spazio percorso è da intendersi come lo spazio angolare percorso, salvo diverso avviso. Nel caso di un filo inestensibile completamente aderente a una filettatura cilindrica di raggio, r, che si srotola sotto l'azione di un momento di forza in seguito alla rotazione del cilindro intorno al proprio asse, lo spazio percorso, s, da un elemento di massa del filo srotolato, è legato allo spazio angolare percorso, θ, da un elemento di massa del filo arrotolato, mediante la relazione geometrica, $s = r\theta$.

3. Infatti dalla definizione di accelerazione angolare istantanea si trae $\mathrm{d}\upsilon = \alpha\,\mathrm{d}t$, e integrando si ottiene:

$$\upsilon - \upsilon_0 = \alpha(t - t_0) \quad ;$$

essendo α costante nelle condizioni considerate. Inoltre dalla definizione di velocità angolare istantanea si trae $\mathrm{d}\theta = \upsilon\,\mathrm{d}t$, e integrando si ottiene:

$$\theta - \theta_0 = \int_{t_0}^{t} \upsilon\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} [\upsilon_0 + \alpha(t - t_0)]\,\mathrm{d}t = \upsilon_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 \quad ;$$

che è l'equazione del moto circolare uniformemente accelerato.

Senza perdita di generalità, lo spazio percorso iniziale e il tempo trascorso iniziale possono ritenersi nulli, $\theta_0 = 0$, $t_0 = 0$, mentre l'annullamento della velocità angolare iniziale, $\upsilon_0 = 0$, costituisce una restrizione effettiva. In tali condizioni, l'equazione del moto circolare uniformemente accelerato si riduce a:

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 \ . \tag{3.2}$$

Per esprimere la (3.2) in forma logaritmica, bisogna dapprima riscriverla in termini di misure anziché di grandezze fisiche, atteso il fatto che non avrebbe senso riferirsi a un logaritmo con argomento diverso da un numero puro (reale positivo o complesso non nullo). Al riguardo, si osserva che l'unità di misura dell'accelerazione angolare, u_α, è legata all'unità di misura dello spazio percorso, u_θ, e all'unità di misura del tempo trascorso, u_t, dalla relazione, $u_\alpha = u_\theta / u_t^2$, conformemente alla definizione di accelerazione angolare istantanea. Dividendo membro a membro la (3.2) per $u_\theta = u_\alpha u_t^2$, si ottiene:

$$\not\theta = \frac{1}{2} \not\alpha \not t^2 \ ; \tag{3.3a}$$

$$\not\theta = \frac{\theta}{u_\theta} \ ; \qquad \not t = \frac{t}{u_t} \ ; \qquad \not\alpha = \frac{\alpha}{u_\alpha} \ ; \tag{3.3b}$$

e passando ai logaritmi si ha:

$$\log_{10} \not\theta = 2 \log_{10} \not t + \log_{10} \not\alpha - \log_{10} 2 \ ; \tag{3.4}$$

che nel piano cartesiano, $(\mathrm{O} \log_{10} \not t \, \log_{10} \not\theta)$, costituisce l'equazione di una retta avente coefficiente angolare, 2, e intercetta verticale, $\log_{10} \not\alpha - \log_{10} 2$.

Capitolo IV

Apparato sperimentale

L'apparato sperimentale, riprodotto in Appendice B, è composto dai seguenti elementi.

a) Un cilindro di raggio, R, incavato circolarmente su entrambe le basi, libero di ruotare intorno al proprio asse.
b) Un cilindretto di raggio, $r \ll R$, coassiale e solidale al precedente, recante una filettatura sulla superficie laterale.
c) Un filo avvolgibile sulla filettatura, recante una spina da inserire in un'apposita cavità nel cilindretto ad una estremità e un corpo rigido di massa nota all'altra estremità.
d) Un cronometro di caratteristiche note.

Con buona approssimazione, si possono ritenere valide le seguenti ipotesi restrittive.

a) Il cilindro e il cilindretto sono rigidi con distribuzione di densità a simmetria radiale, ossia le superfici isopicniche (vale a dire di ugual densità) presentano una sezione circolare con centro giacente sull'asse di rotazione, rispetto a un piano ad esso normale e compreso tra la base del cilindretto e la base del cilindro separate dalla massima distanza[1].
b) La massa del filo è trascurabile rispetto alla massa delle parti in movimento, costituite dal cilindro, dal cilindretto, e dal corpo rigido in caduta.
c) La velocità relativa tra filo avvolto e filettatura è nulla.

1. Si può ritenere che tale condizione sia soddisfatta anche nel caso particolare di un volano omogeneo facendo tendere simultaneamente, in ogni superficie isopicnica, la densità allo stesso valore.

Ne discende che il baricentro del volano giace sull'asse del cilindro, coincidente con l'asse di rotazione; il momento motore è costante in modulo, direzione, verso; il filo è inestensibile e totalmente aderente alla filettatura.

Per poter valutare la lunghezza del filo avvolto conoscendo il numero di giri effettuati e il raggio del cilindretto, si rende necessaria la determinazione dell'origine degli angoli. Al riguardo, si individua per tentativi la conformazione geometrica del volano in corrispondenza alla quale la spina all'estremità del filo si distacca dal cilindretto, sia a parità di giri di avvolgimento, sia per giri di avvolgimento differenti. Il confronto tra le configurazioni ottenute in corrispondenza fornisce un valore, $\Delta^{\mp}\theta$, che esprime l' indeterminazione sull'origine degli angoli, definita dalla bisettrice di $\Delta\theta = 2\Delta^{\mp}\theta$.

Capitolo V

Equazione del moto

In relazione all'apparato sperimentale riprodotto in Appendice B, l'applicazione del teorema del momento della quantità di moto al volano, unitamente ad una scelta opportuna del sistema di riferimento (l'origine coincidente con il baricentro del volano, un asse in direzione verticale, e un asse coincidente con l'asse di rotazione) permette di riferirsi all'equazione scalare:

$$M = \frac{\mathrm{d}\mathscr{M}}{\mathrm{d}t} \quad ; \tag{5.1}$$

dove il momento di forza, M, è dato dalla somma di tre contributi: il momento motore, M_g, dovuto all'azione del corpo rigido in caduta[1]; il momento passivo, M_r, dovuto all'attrito radente e/o volvente[2], che si esercita tra le superfici delle parti di sistema in moto relativo l'una rispetto all'altra e a contatto reciproco[3]; il momento passivo, M_v, dovuto all'attrito viscoso che si esercita tra le superfici delle parti di

1. L'espressione esplicita del momento motore è data da:

$$M_g = \left|\vec{F}_g \wedge \vec{r}_p\right| = m_p g r \quad ;$$

dove r_p è la distanza del baricentro del corpo rigido in caduta dall'origine degli assi, m_p la massa del corpo rigido in caduta, g l'accelerazione di gravità locale, e il simbolo, $\wedge$, denota il prodotto esterno tra vettori, conformemente alla tradizione italiana. A rigore di termini, si dovrebbe considerare anche la spinta di Archimede agente sul corpo rigido in caduta e diretta verso l'alto, che d'altra parte risulta trascurabile nel caso dei gas, nella fattispecie l'aria, ma non nel caso dei liquidi, ad esempio l'acqua, o dei mezzi amorfi, ad esempio il burro di arachidi.

2. Si parla di attrito radente in presenza di parti di sistema in scorrimento una sull'altra. Si parla di attrito volvente in presenza di parti di sistema in rotolamento una sull'altra. Si parla di attrito radente e volvente in presenza di parti di sistema in rotolamento una sull'altra con scorrimento.

3. L'espressione esplicita del momento passivo dovuto all'attrito radente e/o volvente è data da:

$$M_r = -k_r r \quad ;$$