aracne

LUCIANO AMITO LOMONACO

ELEMENTI DI TOPOLOGIA ALGEBRICA

GRUPPO FONDAMENTALE, OMOLOGIA SINGOLARE, ALGEBRA OMOLOGICA

aracne

aracne

ISBN
979–12–5994–904–2

PRIMA EDIZIONE
ROMA 15 APRILE 2022

a Nadia, Stefano, Viola,
e anche
all'uomo canonico
[2,4,8,13,1,10,7,3,5,6,11,12,9,14,15]
che è pur sempre l'autore

Indice

Premessa

Il materiale contenuto nel presente volume scaturisce dagli argomenti da me trattati, negli anni, in corsi di Topologia Algebrica e di Istituzioni di Geometria Superiore, presso l'Università degli Studi di Napoli Federico II. Di certo non mancano in circolazione ottimi libri di introduzione a tale affascinante settore della Matematica, ma l'esiguo numero di testi in lingua italiana e la voglia di fornire una esposizione personalizzata di tali argomenti mi hanno spinto a scrivere queste pagine, nella speranza che questo libro possa riuscire utile agli studenti di Matematica e suscitare in loro il desiderio di un ulteriore approfondimento della Topologia Algebrica. Non sfuggirà certo, d'altra parte, ad un occhio esperto, l'influenza che alcuni testi fondamentali hanno avuto nella presente esposizione.

Il materiale qui presentato è diviso in Capitoli e Sezioni. Nel Capitolo 1 si descrive la costruzione del gruppo fondamentale di uno spazio puntato, e si effettua il calcolo di tale gruppo per spazi quali ad esempio le sfere e gli spazi proiettivi reali, evidenziando la relazione esistente tra tale costruzione e la teoria dei rivestimenti. Come applicazione dei risultati ottenuti, si fornisce una dimostrazione del Teorema del punto fisso di Brouwer. Si introducono gli elementi di algebra (prodotto libero di due gruppi e push out) necessari per poter enunciare il Teorema di Seifert–van Kampen, la cui dimostrazione è, peraltro, omessa. Nell'ultima sezione del primo capitolo si introducono le azioni gruppali su spazi topologici, pensando soprattutto ad alcune possibili applicazioni in Geometria Differenziale, e si fornisce un esempio, suggerito all'autore da Franco Mercuri, di spazio topologico avente gruppo fondamentale finito e non abeliano. Il carattere funtoriale della costruzione del gruppo fondamentale è evidenziato, anche se il concetto di funtore sarà introdotto solo successivamente.

Nel Capitolo 2 si introducono, appunto, le nozioni di *categorie, funtori, trasformazioni naturali*, e si definiscono i gruppi di omologia singolare di uno spazio topologico, dopo aver offerto una sintesi dei richiami di algebra e di geometria affine necessari. Si è volutamente scelto di non sviluppare la teoria dell'omologia simpliciale e di usare solo il minimo indispensabile di nozioni di omotopia generale. Il background necessario di omotopia generale viene comunque fornito nella Sezione 2.2, e questo materiale viene poi usato per fornire una dimostrazione del Teorema fondamentale dell'algebra.

Nel Capitolo 3 alcune nozioni di algebra omologica vengono introdotte, ed il lettore potrà capire come esse nascano dalle idee geometriche contenute nelle sezioni precedenti. Si fornisce una dimostrazione dettagliata del Teorema di invarianza omotopica dell'omologia e, in applicazione di tale risultato, il Teorema di Hurewicz, che fornisce un'idea della relazione esistente tra omotopia ed omologia, viene enunciato e dimostrato. Nella Sezione 3.3 viene introdotta l'omologia relativa allo scopo di dimostrare il Teorema di escissione e di costruire quindi la successione di Mayer–Vietoris associata ad una terna escissiva. L'utilizzo di tale successione esatta consente di calcolare i gruppi di omologia di vari spazi, fra cui le sfere, il toro ed il piano proiettivo reale.

Ho scelto di usare un'unica numerazione per tutti i tipi di enunciati, all'interno dei capitoli, ed un'altra numerazione per le formule che è necessario richiamare successivamente. Come è d'uso comune, il simbolo $\square$ è utilizzato per marcare la fine di una dimostrazione (o l'assenza di essa). Le figure presenti in questo libro hanno, ovviamente, il solo scopo di fornire esempi visivi delle situazioni descritte.

Avrei tanti ringraziamenti da fare. Mi limiterò a menzionare il mio editore, Gioacchino Onorati, che mi affianca ed incoraggia da decenni, e gli amici Maurizio Brunetti, Bruno Buonomo, Giovanni Cutolo, Francesco D'Andrea, Francesco Della Pietra, Davide Franco e Carlo Nitsch, che hanno collaborato con me a vario titolo.

1. Gruppo fondamentale

1.1. Richiami di topologia

È opportuno premettere alcuni richiami ed approfondimenti di Topologia Generale, riguardanti la connessione per archi ed altri argomenti correlati. Usiamo i simboli X, Y, Z, ecc. per indicare spazi topologici.

1.1 Definizione. *Una famiglia $\mathcal{R} = \{\, U_\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{A} \,\}$ di sottospazi di X si dice* ricoprimento *se $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$.*

Spesso gli elementi dell'insieme $\mathcal{A}$ sono detti *indici*.

1.2 Definizione. *Un ricoprimento $\mathcal{R} = \{\, U_\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{A} \,\}$ di sottospazi di X si dice localmente finito se per ogni $x \in X$ esiste un indice $\alpha \in \mathcal{A}$ tale che $x \in U_\alpha$ e $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ solo per una quantità finita di indici $\beta \in \mathcal{A}$.*

1.3 Lemma di incollamento. *Sia $\mathcal{R} = \{\, U_\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{A} \,\}$ un ricoprimento di X e, per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$, sia $f_\alpha : U_\alpha \to Y$ una funzione continua. Supponiamo che per ogni coppia di indici $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ tali che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ e per ogni $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ si abbia $f_\alpha(x) = f_\beta(x)$. Esiste allora un'unica applicazione $f : X \to Y$ tale che $f_{|U_\alpha} = f_\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$. Se, inoltre, $\mathcal{R}$ è un ricoprimento aperto, oppure è un ricoprimento finito e chiuso, tale estensione è continua.*

Dimostrazione. La costruzione di f è ovvia: per ogni $x \in X$ si sceglie un indice α tale che $x \in U_\alpha$ e si pone $f(x) := f_\alpha(x)$. Si verifica agevolmente che f è ben posta ed è unica. Supponiamo ora che il ricoprimento $\mathcal{R}$ sia aperto. Per ogni aperto W di Y si ha che $f^{-1}(W) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha^{-1}(W)$ che è un aperto in quanto unione di aperti, per la continuità delle funzioni f_α. Per i ricoprimenti finiti e chiusi si ragiona in modo analogo. $\square$

In realtà tale enunciato resta valido in condizioni più generali: basta anche richiedere che $\mathcal{R}$ sia localmente finito e chiuso. Indichiamo, ora e nel seguito, con il simbolo I l'intervallo $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

1.4 Definizione. *Siano $y_0, y_1 \in Y$. Un* cammino, *o* arco, *σ di punto iniziale y_0 e punto finale y_1 è una funzione continua $\sigma : I \to Y$ tale che $\sigma(0) = y_0$ e $\sigma(1) = y_1$. Si dice anche che σ è un arco in Y da y_0 ad y_1. Il sottospazio $\sigma(I) \subseteq Y$ si dice* traiettoria *di σ. Indicheremo con Y^I l'insieme degli archi in Y, e con $Y^I(y_0, y_1)$ l'insieme degli archi in Y da y_0 a y_1.*

1.5 Esempio (Arco costante). *Per ogni $y \in Y$, la funzione costante $\kappa_y : I \to Y$, definita ponendo $\kappa_y(t) = y$ per ogni $t \in I$, è chiaramente un arco, noto come arco costante.*

1.6 Esempio (Arco inverso). *Sia $\sigma : I \to Y$, un arco in Y, da y_0 a y_1 e da y_1 a y_2. La funzione $\sigma^{-1} : I \to Y$, definita ponendo $\sigma^{-1}(t) = \sigma(1-t)$ per ogni $t \in I$, è chiaramente un arco da y_1 a y_0, noto come arco inverso di σ. C'è un evidente abuso di notazione: σ^{-1} non rappresenta, in questo contesto, l'inversa della funzione σ.*

1.7 Esempio (Arco composto). *Siano $y_0, y_1, y_2 \in Y$ e siano $\sigma, \tau : I \to Y$ archi in Y, da y_0 a y_1 e da y_1 a y_2, rispettivamente. La funzione $\sigma * \tau : I \to Y$, definita ponendo*

$$\sigma * \tau(t) = \begin{cases} \sigma(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \tau(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

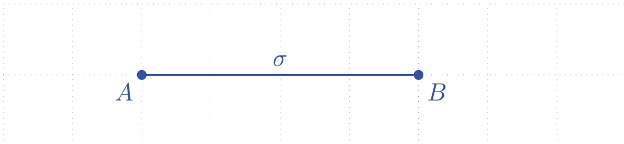
è un arco da y_0 a y_2, noto come arco composto di σ e τ. Il lettore potrà agevolmente verificare che tale definizione è ben posta e che $\sigma * \tau$ è una funzione continua, e quindi un arco, utilizzando il fatto che gli intervalli $[0, \frac{1}{2}]$ e $[\frac{1}{2}, 1]$ costituiscono un ricoprimento finito e chiuso di I.

1.8 Esempio (Parametrizzazione lineare standard di un segmento). *Sia Y un sottoinsieme convesso di uno spazio affine, e siano $y_0, y_1 \in Y$. Un arco $\omega : I \to Y$ da y_0 a y_1 si* *ottiene ponendo* $\omega(t) = (1-t)y_0 + ty_1$, *per ogni* $t \in I$. *La traiettoria di* ω *è proprio il segmento* $\overline{y_0y_1}$. *Tale arco è noto come* parametrizzazione lineare standard *del segmento* $\overline{y_0y_1}$. *Indicheremo, se occorrerà, con* ϖ *la restrizione* $\varpi : I \to \overline{y_0y_1}$ *di* ω *sull'immagine, e chiameremo anche* ϖ *parametrizzazione lineare standard del segmento* $\overline{y_0y_1}$. *Osserviamo che* ϖ *è un omeomorfismo.*

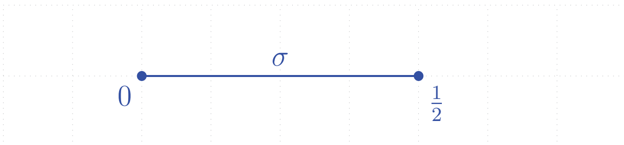
1.9 Esempio (Rappresentazione di un arco su un segmento). *Sia* $\sigma \in Y^I(y_0, y_1)$ *e siano* A, B *due punti distinti di uno spazio affine. Diremo che* σ *viene rappresentato sul segmento* $\overline{AB}$ *quando si considera la funzione composta*

$$\overline{AB} \xrightarrow{f} I \xrightarrow{\sigma} Y$$

dove f *è l'inversa della parametrizzazione lineare standard* ϖ *del segmento* $\overline{AB}$. *Tale situazione viene illustrata graficamente al modo seguente*



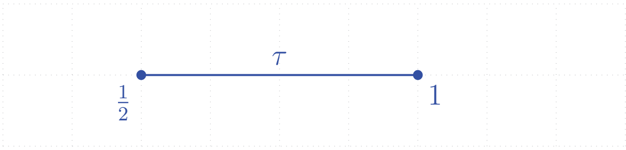
Ad esempio, se $\sigma \in Y^I(y_0, y_1)$ e $\tau \in Y^I(y_1, y_2)$, possiamo rappresentare σ sull'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$, ovvero



Ciò vuol dire che stiamo considerando la funzione composta

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \xrightarrow{f} I \xrightarrow{\sigma} Y$$

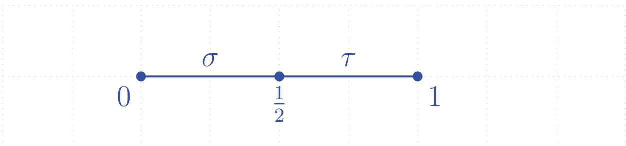
dove f è definita ponendo $f(s) = 2s$, per ogni $s \in I$. Pertanto la funzione composta considerata è quella che manda s in $\sigma(2s)$. Analogamente, τ può essere rappresentato sull'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$:



In tal caso stiamo considerando la funzione composta

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right] \xrightarrow{g} I \xrightarrow{\tau} Y$$

dove g è definita ponendo $g(s) = 2s - 1$. Dunque, la funzione composta considerata è quella che manda s in $\tau(2s-1)$. Pertanto risulta naturale rappresentare l'arco composto $\sigma * \tau$ come segue:



1.10 Definizione. *Sia X un sottospazio di Y. Diremo che X è* connesso per archi *se per ogni coppia di punti (x_0, x_1) di X esiste un arco σ in X (ovvero tale che $\sigma(I) \subseteq X$), da x_0 ad x_1.*

1.11 Proposizione. *Se X è connesso per archi, X è anche connesso.*

Dimostrazione. Siano $x_0, x_1 \in X$, e sia σ un arco in X da x_0 a x_1. Allora la traiettoria $\sigma(I)$ è un connesso di X (in quanto I è connesso e σ è una funzione continua). L'asserto segue da una nota caratterizzazione dei connessi. $\square$

1.12 Proposizione. *Se $f : X \to X'$ è una funzione continua, e X è connesso per archi, anche il sottospazio $f(X)$ di X' è connesso per archi.*

Dimostrazione. Siano $y_0, y_1 \in f(X)$, e siano $x_0, x_1 \in X$ tali che $f(x_0) = y_0$ e $f(x_1) = y_1$. Sia, inoltre, σ un arco in X da x_0 a x_1. Allora la funzione composta $f \circ \sigma$ è un arco in $f(X)$ da y_0 a y_1, come è agevole verificare. □

1.13 Corollario. *Se $X \approx X'$, allora X è connesso per archi se, e solo se, X' è connesso per archi.*

Come nel caso della connessione per poligonali, anche per la connessione per archi vale un risultato riguardante i sottospazi aperti di $\mathbb{R}^n$.

1.14 Proposizione. *Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è un sottospazio aperto e connesso, allora X è anche connesso per archi.*

Dimostrazione. Se $X = \emptyset$, l'asserto è banale. Sia dunque $X \neq \emptyset$ e sia $x_0 \in X$. Definiamo un sottoinsieme $A \subseteq X$ come segue:

$$A = \left\{ x \in X \mid X^I(x_0, x) \neq \emptyset \right\} .$$

Tale sottoinsieme è chiaramente non vuoto, in quanto $x_0 \in A$. Proviamo che A è aperto. Sia $z \in A$. Poiché X è aperto, esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che l'intorno sferico $C = C(z, \delta)$ di centro z e raggio δ è contenuto in X. Per ogni $y \in C$, il segmento $\overline{zy}$ è la traiettoria di un arco τ in C, e quindi in X, da z a y. Inoltre, poiché $z \in A$, esiste un arco σ in X da x_0 a z. Pertanto $\sigma * \tau$ è un arco in X da x_0 a y, e quindi $y \in A$. Dunque $C \subseteq A$ e A è aperto. Con un analogo ragionamento si verifica che il complemento $B = X \setminus A$ è aperto. Quindi, essendo X connesso, deve essere $B = \emptyset$, cioè $A = X$. Infine, se $x, y \in X$, scelti un arco σ in X, da x_0 a x ed un arco τ in X, da x_0 a y, è chiaro che $\sigma^{-1} * \tau$ è un arco in X da x a y. □

I seguenti risultati, che generalizzano analoghe proprietà della connessione, sono di facile verifica.

1.15 Proposizione. *Se esiste un punto $x_0 \in X$ tale che $X^I(x_0, x) \neq \emptyset$ per ogni $x \in X$, allora X è connesso per archi.*

1.16 Corollario. *Se X_1, X_2 sono spazi connessi per archi, e $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, allora $X_1 \cup X_2$ è connesso per archi.*

Da quanto detto finora, si deduce che ogni spazio convesso è connesso per archi. Consideriamo ora due sottospazi notevoli di $\mathbb{R}^{n+1}$: il disco unitario D^{n+1} e la sfera unitaria S^n, che sono definiti come segue.

$$D^{n+1} = \left\{ \mathbf{z} = (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n} z_i^2 \leq 1 \right\}$$

$$S^n = \left\{ \mathbf{z} = (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n} z_i^2 = 1 \right\}.$$

Il disco unitario è connesso per archi, per ogni $n \geq -1$, poiché è convesso. È chiaro che il sottospazio S^0 di $\mathbb{R}$ non è connesso per archi. Per ogni $n \geq 1$, la sfera unitaria S^n risulta connessa per archi. Per provare tale affermazione, procediamo come segue. Definiamo, per ogni $n \geq 1$, i seguenti sottospazi di S^n

$$E^n_+ = \left\{ \mathbf{z} \in S^n \,\middle|\, z_n \geq 0 \right\} ,$$
$$E^n_- = \left\{ \mathbf{z} \in S^n \,\middle|\, z_n \leq 0 \right\} ,$$

che prendono il nome, rispettivamente, di emisfero superiore ed inferiore di S^n. Tali emisferi sono, entrambi, omeomorfi al disco unitario D^n di $\mathbb{R}^n$. Un omeomorfismo è dato, ad esempio, dalla funzione continua $\Phi_\pm : E^n_\pm \to D^n$ definita ponendo $\Phi_\pm(\mathbf{z}) = (z_0, \dots, z_{n-1})$. L'inversa $\psi_\pm$ è data, invece, dalla formula

$$\psi_\pm(z_0, \dots, z_{n-1}) = \left(z_0, \dots, z_{n-1}, \pm\sqrt{1 - (z_0^2 + \cdots + z_{n-1}^2)} \right).$$

Pertanto gli emisferi $E^n_\pm$ sono sottospazi connessi per archi di S^n. È chiaro poi che $S^n = E^n_+ \cup E^n_-$ e che l'intersezione dei due emisferi è non vuota (si verifica agevolmente che $E^n_+ \cap E^n_- \approx S^{n-1}$). In base ai risultati precedenti, deduciamo che la sfera unitaria S^n è connessa per archi.

In perfetta analogia con il caso della connessione, anche nel caso della connessione per archi ha senso parlare di *componenti*.

1.17 Definizione. *Sia $E \subseteq Y$. Diremo che E è una* componente connessa per archi *di Y se E è un sottospazio connesso per archi massimale.*

1.18 Proposizione. *Sia Y uno spazio topologico.*

(i) Ogni sottospazio connesso per archi di Y, ed in particolare ogni singleton, è contenuto in una componente connessa per archi.

(ii) Le componenti connesse per archi di Y sono, a due a due, disgiunte.

(iii) Ogni componente connessa per archi di Y è contenuta in una componente connessa.

Dimostrazione. La dimostrazione è simile a quella di analoghi risultati sui sottospazi connessi. In particolare, la prima parte è una classica applicazione del Lemma di Zorn. □

Pertanto, le componenti connesse per archi di Y costituiscono una partizione di Y. Consideriamo la relazione d'equivalenza $\sim$ associata a tale partizione. Più esplicitamente, se $x_0, x_1 \in Y$, poniamo $x_0 \sim x_1$ se, e solo se, esiste in Y un arco da x_0 a x_1.

1.19 Definizione. *L'insieme quoziente $Y/\sim$ sarà denotato con il simbolo $\pi_0(Y)$.*

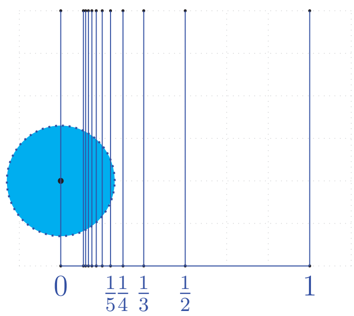
Gli elementi di $\pi_0(Y)$ saranno, pertanto, le componenti connesse per archi di Y. Si potrebbe verificare che per una certa classe di spazi (gli H'-spazi), $\pi_0(Y)$ ha una struttura naturale di gruppo.

1.20 Definizione. *Uno spazio topologico Y si dice* localmente connesso per archi *se per ogni $x \in Y$ e per ogni intorno V di x esiste un intorno aperto e connesso per archi U di x contenuto in V.*

È utile osservare che la nozione di connessione per archi e quella di connessione locale per archi sono indipendenti. È agevole trovare esempi di spazi localmente connessi per archi che non siano connessi per archi. Basta considerare uno spazio discreto con cardinalità maggiore di uno. Il viceversa è meno agevole. Un esempio di spazio connesso per archi, ma non localmente connesso per archi, è dato dal seguente sottospazio $Y \subseteq \mathbb{R}^2$, noto anche come il *pettine del topologo*:

$$Y = \Big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\{\tfrac{1}{k}\} \times I) \Big) \bigcup (I \times \{0\}) \bigcup (\{0\} \times I) \ ,$$

di cui proponiamo la seguente rappresentazione grafica, in cui si evidenzia un particolare punto, ed un suo intorno circolare, che è chiaramente non connesso per archi.



Vale il seguente risultato, relativo alle componenti connesse per archi di uno spazio localmente connesso per archi.

1.21 Lemma. *Se lo spazio topologico Y è localmente connesso per archi, le sue componenti connesse per archi sono aperte e chiuse.*

Dimostrazione. Sia $x \in Y$ e sia C la componente connessa per archi a cui x appartiene. Se V è un intorno aperto di x, esisterà un intorno aperto e connesso per archi di x, diciamo U, contenuto in V. Quindi $U \subseteq C$, essendo C un sottospazio connesso per archi massimale, e C è un aperto. Inoltre C è il complemento dell'unione di tutte le altre componenti connesse per archi, pertanto è un chiuso. $\square$

1.22 Teorema. *Se lo spazio topologico Y è connesso e localmente connesso per archi, Y è connesso per archi.*

Dimostrazione. Poiché ogni componente connessa per archi di Y è, in base al lemma precedente, aperta e chiusa, Y possiede un'unica componente connessa per archi. □

Concludiamo questo riepilogo sulla connessione per archi con una caratterizzazione della connessione per archi nel caso di spazi prodotto.

1.23 Teorema. *Sia $X = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ uno spazio prodotto. X è connesso per archi se, e solo se, X_α è connesso per archi, per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$.*

Dimostrazione. Per ogni $\beta \in \mathcal{A}$, sia $\pi_\beta : X \to X_\beta$ la proiezione, che associa all'elemento $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ la sua componente x_β. Se X è connesso per archi, poiché π_β è una funzione continua e suriettiva, anche X_β sarà uno spazio connesso per archi, per ogni $\beta \in \mathcal{A}$. Supponiamo, viceversa, che X_α sia connesso per archi, per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$. Siano $y = (y_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ e $z = (z_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ due punti di X. Per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$, sia $\sigma_\alpha \in X_\alpha^I(y_\alpha, z_\alpha)$. La funzione prodotto

$$\sigma = (\sigma_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} : I \longrightarrow X$$

(che ad ogni $t \in I$ associa l'elemento $(\sigma_\alpha(t))_{\alpha\in\mathcal{A}}$ di X) è chiaramente un arco in X da y a z. □

1.2. Omotopie tra archi

Introduciamo ora la nozione di *omotopia tra archi*, un caso particolare della nozione di omotopia tra funzioni che sarà data successivamente.

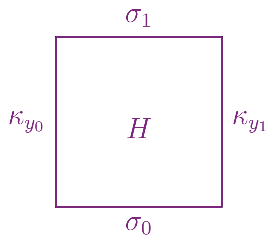
1.24 Definizione. *Siano $\sigma_0, \sigma_1 \in Y^I(y_0, y_1)$. Diremo che σ_0 è omotopo a σ_1 (e scriveremo $\sigma_0 \simeq \sigma_1$) se esiste una funzione continua*

$$H : I \times I \longrightarrow Y$$

tale che

$$H(s,0) = \sigma_0(s)\ ,\ H(s,1) = \sigma_1(s)\ ,\ H(0,t) = y_0\ ,\ H(1,t) = y_1\ \forall\ s,t \in I\ .$$

La funzione continua H, che non è, in generale, unica, prende il nome di *omotopia (tra archi)* da σ_0 a σ_1. Scriveremo, talvolta, $H : \sigma_0 \simeq \sigma_1$. Graficamente, H si rappresenta, schematicamente, come segue:



Il quadrato in figura rappresenta lo spazio $I \times I$ (immerso in $\mathbb{R}^2$). Abbiamo utilizzato le rappresentazioni grafiche introdotte nella sezione precedente. Ciò vuol dire che il lato verticale sinistro del quadrato, che è costituito dai punti del tipo $(0, t)$, è trasformato da H nel punto y_0 e il lato verticale destro del quadrato, che è costituito dai punti del tipo $(1, t)$, è trasformato da H nel punto y_1. Infine, σ_0 è rappresentato sul lato orizzontale inferiore e σ_1 è rappresentato sul lato orizzontale superiore. Posto, per ogni $t \in I$, $\sigma_t(s) = H(s, t)$, resta definito un arco σ_t da y_0 a y_1, ed H può vedersi come una deformazione continua di σ_0 in σ_1 mediante la famiglia di archi $\{\sigma_t\}_{t \in I}$. Nella seguente figura si evidenziano le traiettorie, tratteggiate, di alcuni degli archi σ_t, ed in particolare, in blu, la traiettoria di $\sigma_{\bar{t}}$.