aracne

PATRIZIA DI GIRONIMO
GERARDO IOVANE
ELMO BENEDETTO
ANTONIO BRISCIONE

ANALISI MATEMATICA PER INFORMATICI

TEORIA ED ESERCIZI

aracne

aracne

ISBN
979–12–5994–583–9

PRIMA EDIZIONE
ROMA 9 FEBBRAIO 2021

INDICE

Prefazione

Dalle esperienze degli autori nell'insegnamento dell'Analisi Matematica per il corso di laurea in Informatica nasce questo testo che vuole rappresentare un riferimento formativo per gli studenti del corso. Porre delle solide basi matematiche e allenare al ragionamento logico-deduttivo nel primo anno di studi viene ritenuto dagli autori fondamentale per il prosieguo formativo e lavorativo dello studente. Partendo dai fondamenti dell'Analisi Matematica, lo studio delle funzioni ad una variabile viene affrontato dalla teoria alla pratica grazie ai numerosi esercizi svolti e commentati presenti nel testo. Fornire allo studente un percorso chiaro di studio ed accompagnarlo nello sviluppo delle competenze in materia rappresenta il fine ultimo di questo testo frutto della condivisione dell'attività pluriennale di insegnamento degli autori.

Prerequisiti

Dio creò i numeri naturali; tutto il resto è opera dell'uomo

Leopold Kronecker

In questo capitolo richiamiamo alcuni concetti che saranno utili nei capitoli successivi. La maggior parte di essi dovrebbero essere già noti agli studenti essendo argomenti della scuola secondaria.

Insiemi

In matematica si usa la parola "insieme" per indicare un raggruppamento, una collezione di elementi. Le nozioni di insieme ed elemento di un insieme sono considerate come concetti primitivi, così come le nozioni di punto, retta, piano e spazio in geometria. Questo significa che non sono definibili mediante concetti più semplici e né riconducibili ad altri concetti definiti in precedenza. Si conviene di indicare gli insiemi con lettere maiuscole ed i suoi elementi con minuscole. Per indicare che un elemento a appartiene ad un insieme A, si usa il simbolo $\in$ e si scrive $a \in A$. Invece la scrittura $a \notin A$ indica che l'elemento in oggetto non appartiene all'insieme. Gli insiemi possono essere rappresentati in tre modi diversi:

a) rappresentazione tabulare,
b) diagrammi di Eulero-Venn,
c) rappresentazione mediante proprietà caratteristica.

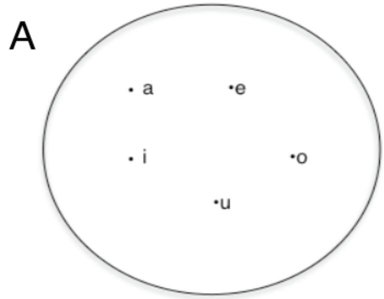
La rappresentazione tabulare si ottiene enumerando gli oggetti entro parentesi graffe. Ad esempio, l'insieme delle vocali lo possiamo scrivere nel seguente modo:

$$A = \{a, e, i, o, u\}.$$

Ovviamente questa rappresentazione è utile se l'insieme è composto da un numero abbastanza limitato di oggetti. Osserviamo che, nella rappresentazione tabulare, l'ordine degli elementi non ha importanza

$$A = \{a, e, i, o, u\} = \{i, e, o, a, u\}.$$

La rappresentazione mediante i diagrammi di Eulero-Venn, invece, prevede che gli elementi dell'insieme vengano riportati entro una linea chiusa continua e non intrecciata:



La rappresentazione mediante proprietà caratteristica, infine, consiste nell'enunciare una proprietà che caratterizza tutti gli elementi dell'insieme. Se, ad esempio, dobbiamo rappresentare l'insieme delle consonanti della parola *studente*, è possibile scrivere:

$$A = \{x : \ x \text{ è } una\ consonante\ della\ parola\ studente\}$$

dove il simbolo ": " si legge "tale che".

Un insieme che non contiene elementi è detto ***insieme vuoto*** e lo si indica con il simbolo $\emptyset$.
Ad esempio, se consideriamo l'insieme dei triangoli della geometria euclidea con un lato maggiore della somma degli altri due, esso non contiene elementi e rappresenta un esempio di insieme vuoto.

Definizione 0.1 *– Si dice che l'insieme B è un* **sottoinsieme** *di A quando ogni elemento di B appartiene ad A e si scrive* $B \subseteq A$.

Definizione 0.2 *– Si dice che l'insieme B è un* **sottoinsieme proprio** *di A se* $B \neq \emptyset$ *ed esistono elementi di A che non appartengono a* B. *In questo caso scriveremo* $B \subset A$.

Si conviene di considerare l'insieme vuoto sottoinsieme di ogni insieme.

Definizione 0.3 *– Dato un insieme A, si chiama* ***insieme delle parti*** *di A l'insieme di tutti i sottoinsiemi propri ed impropri di A e lo si indica con* $\wp(A)$.

Se ad esempio $A = \{a, e, i\}$, allora

$$\wp(A) = \big\{\emptyset, A, \{a\}, \{e\}, \{i\}, \{a, e\}, \{a, i\}, \{e, i\}\big\}.$$

Osserviamo che se A ha n elementi, allora $\wp(A)$ ha 2^n elementi.

Definizione 0.4 *– Si chiama* ***intersezione*** *tra due insiemi A e B l'insieme degli elementi appartenenti sia ad A che a B e la si indica con* $A \cap B$.

In forma simbolica possiamo scrivere

$$A \cap B = \{x : \ x \in A \ \wedge \ x \in B\}.$$

Il simbolo $\wedge$ indica la congiunzione "e". Se $A \cap B = \emptyset$, gli insiemi si dicono **disgiunti**. Ricordiamo che l'intersezione gode della proprietà commutativa e di quella associativa, cioè:

$$A \cap B = B \cap A;$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Definizione 0.5 *– Si chiama* ***unione*** *tra due insiemi A e B l'insieme degli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi e la si indica con* $A \cup B$.
In forma simbolica possiamo scrivere

$$A \cup B = \{x : \ x \in A \ \vee \ x \in B\}.$$

Il simbolo $\vee$ indica la disgiunzione logica "o". Anche l'unione gode della proprietà commutativa e di quella associativa, cioè:

$$A \cup B = B \cup A;$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Inoltre, vale sia la proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione che quella dell'unione rispetto all'intersezione, cioè:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Definizione 0.6 **–** *Si definisce* ***differenza*** *fra due insiemi l'insieme degli elementi del primo insieme che non appartengono al secondo insieme.*

In forma simbolica

$$A \setminus B = \{x : \ x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Ad esempio se $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{c, d, e, f\}$, si ha che $A \setminus B = \{a, b\}$.

La differenza tra insiemi gode della proprietà distributiva sia rispetto all'unione che all'intersezione, cioè:

$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C);$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Nel caso in cui B sia sottoinsieme proprio di A, $B \subset A$, la differenza tra i due insiemi è detta complementare di B rispetto ad A, ed è un insieme indicato con $C_A(B)$. Per il complementare di un insieme rispetto ad un insieme X, valgono le **leggi di De Morgan**

$$C_X(A \cap B) = C_X(A) \cup C_X(B);$$

$$C_X(A \cup B) = C_X(A) \cap C_X(B).$$

Definizione 0.7 **–** *Si chiama* ***differenza simmetrica*** *tra gli insiemi A e B e si indica con $A \triangle B$, la differenza tra l'unione e l'intersezione dei due insiemi.*

In simboli

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

La differenza simmetrica gode delle proprietà commutativa e associativa, cioè:

$$A \triangle B = B \triangle A;$$
$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

Inoltre vale la seguente proprietà:

$$(A \triangle B) \triangle (B \triangle C) = A \triangle C.$$

Definizione 0.8 *– Si chiama* **prodotto cartesiano** *di A per B, in simboli $A \times B$, l'insieme di tutte le possibili coppie ordinate aventi come prima componente un elemento di A e come seconda un elemento di B.*

In simboli

$$A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\}.$$

Ricordiamo che

$$A \times B \neq B \times A$$

e, inoltre si conviene di porre

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset.$$

Il prodotto cartesiano di un insieme con se stesso è detto quadrato cartesiano, cioè:

$$A^2 = A \times A = \{(a, b): a \in A, b \in A\}.$$

Un esempio di quadrato cartesiano è $\mathbb{R}^2$.

Il sottoinsieme del quadrato cartesiano costituito da coppie uguali è detto diagonale e indicato con ΔA. Cioè

$$\Delta A = \{(a, a): a \in A\}.$$

Il prodotto cartesiano si estende anche a tre o più insiemi ed è distributivo rispetto all'unione ed alla intersezione:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C);$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

Definizione 0.9 *– Si dice che un insieme di sottoinsiemi non vuoti di un insieme A è un* **ricoprimento** *di A se ogni elemento di A appartiene* *ad almeno uno dei sottoinsiemi.*

Definizione 0.10 *– Se un ricoprimento è fatto con sottoinsiemi disgiunti, si parla di* ***partizione*** *di A.*

Ora ricordiamo altri simboli matematici che saranno utili nel seguito, il cosiddetto quantificatore universale $\forall$, che si legge "per ogni", ed il quantificatore esistenziale $\exists$, che si legge "esiste almeno un". La negazione, così come già visto con il simbolo di appartenenza, si indica sbarrando il simbolo. Infine, un punto esclamativo dopo il quantificatore esistenziale $\exists!$, vuol dire "esiste ed è unico". Nelle dimostrazioni sarà usato il seguente simbolo $\Rightarrow$ che vuol dire "implica".
Osserviamo che vale la seguente equivalenza

$$P \Rightarrow Q \quad \text{è equivalente a} \quad non\ Q \Rightarrow non\ P.$$

Invece $\Leftrightarrow$ si legge "se e solo se".
Concludiamo questa sezione con un richiamo storico alla teoria assiomatica e rigorosa degli insiemi. Nella seconda metà del 1800 i matematici pensarono che per fondare la matematica su solide basi tutto avrebbe dovuto basarsi sulla teoria degli insiemi. La teoria degli insiemi che abbiamo appena esposto, era stata formulata principalmente da **Cantor** e si è soliti chiamarla teoria "intuitiva" oppure teoria "ingenua" degli insiemi. Agli inizi del 1900, però, il matematico e filosofo inglese **Bertrand Russell** formulò un enunciato nell'ambito della teoria degli insiemi di Cantor, che è passato alla storia come **Paradosso di Russell.** Un paradosso è una conclusione logica e non contraddittoria che si discosta dal nostro senso comune di vedere le cose. L'enunciato di Russell, invece, è una proposizione autocontraddittoria sia nel caso che sia vera, sia nel caso che sia falsa. Quindi è una vera e propria **antinomia**. Ogni insieme ha la caratteristica o di contenere se stesso come elemento oppure di non contenere se stesso come elemento. Usando le parole dello stesso Russell, osserviamo che l'insieme di tutti i concetti astratti appartiene a se stesso perché, a sua volta, è un concetto astratto. Invece, per esempio, l'insieme di tutte le tazze da tè non è una tazza da tè e non appartiene a se stesso.
Consideriamo i seguenti due insiemi:

a) L'insieme di tutti gli insiemi che contengono se stessi come elemento.
b) L'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi come elemento.

Analizziamo l'insieme b). Possiamo scrivere

$$R = \{A : A \notin A\}.$$

Questo insieme appartiene o non appartiene a se stesso? Se R contiene se stesso come elemento, essendo l'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi, allora non contiene se stesso.

Pertanto,

$$R \in R \Rightarrow R \notin R.$$

Se invece R non appartiene a se stesso, vuol dire che non è uno degli insiemi che non appartengono a se stessi. Pertanto R appartiene a se stesso.

Quindi,

$$R \notin R \Rightarrow R \in R.$$

In conclusione,

$$R \in R \Leftrightarrow R \notin R.$$

Le contraddizioni messe in luce dal paradosso di Russell sono insolubili nell'ambito della teoria intuitiva degli insiemi, se non generando altri paradossi. Per tale motivo è stata sviluppata una teoria assiomatica e rigorosa degli insiemi che è nota come teoria di Zermelo-Fraenkel indicata con **ZF**. Se agli assiomi di Zermelo-Fraenkel si aggiunge un ulteriore assioma, detto assioma della scelta, si parla di teoria **ZFC**.

I numeri naturali

Il primo insieme numerico che l'uomo ha scoperto è stato sicuramente l'insieme dei numeri naturali, in simboli:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3, \ldots \ldots\}.$$

I filosofi e gli storici della scienza parlano di vera e propria scoperta nel senso che $2 + 3 = 5$ esisterebbe indipendentemente dall'essere umano, così come esiste l'universo ed ogni corpo materiale al suo interno, nella visione realistica del mondo.

A questo si riferiva Kronecker con la frase riportata all'inizio del capitolo. Inoltre, tutte le operazioni ben note tra numeri naturali hanno un chiaro significato. Ciò non accadrà con gli altri insiemi numerici. Sapremo fare i conti con tutti i tipi di numeri ma, il significato intuitivo delle operazioni, si perderà sempre di più ampliando gli insiemi numerici.

All'inizio ogni numero naturale era associato a cose pratiche: tre lupi, due alberi, cinque pecore ecc. Ad un certo punto l'uomo capì che se abbiamo tre lupi, tre alberi e tre pecore, questi hanno qualcosa in comune: il numero astratto 3. Questa prima astrazione dell'essere umano, molti ritengono la si possa far coincidere con la nascita della matematica. Noi tutti conosciamo le proprietà dei numeri naturali con le relative operazioni e, quindi, ci sembra che non ci sia molto da dire. Invece, il livello moderno della matematica è talmente avanzato, che per studiare nei dettagli l'insieme $\mathbb{N}$, occorrerebbe un corso specifico. Diciamo soltanto che un matematico italiano, **Giuseppe Peano**, nel 1899 ha costruito un modello ipotetico-deduttivo rigorosissimo per descrivere i numeri naturali e relative proprietà. Questo modello è fondato sui seguenti 5 assiomi

P1) $1 \in \mathbb{N}$;

P2) $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste uno ed un solo $n^* \in \mathbb{N}$ chiamato successore di n;

P3) $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta $n^* \neq 1$;

P4) se $m, n \in \mathbb{N}$ e $m^* = n^*$, allora $m = n$;

P5) ogni sottoinsieme K di $\mathbb{N}$ con le proprietà

a) $1 \in K$;
b) se $k \in K$ allora $k^* \in K$ coincide con $\mathbb{N}$ (Assioma di induzione).

Sembra incredibile, ma anche le proprietà base delle operazioni somma e prodotto vengono dimostrate nel modello di Peano, laddove $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ diventa un teorema.

Si dimostra che per l'**addizione** valgono le seguenti proprietà:

- commutativa: $a + b = b + a$;
- associativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Si dimostra che per la **moltiplicazione** valgono le seguenti proprietà:

- commutativa: $a \cdot b = b \cdot a$;
- associativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
- esistenza dell'elemento neutro 1
  $1\colon\quad \mathrm{a} \cdot 1 = 1 \cdot \mathrm{a} = \mathrm{a} \quad \forall \mathrm{a} \in \mathrm{N}$;
- distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

La **sottrazione** è possibile in $\mathbb{N}$ solo se il minuendo è maggiore del sottraendo e per essa vale la seguente proprietà:

- invariantiva: addizionando o sottraendo, quando ciò è possibile, uno stesso numero naturale ai due termini della sottrazione, la differenza non cambia.

Anche la **divisione** non è sempre possibile in $\mathbb{N}$ e per essa valgono le due seguenti proprietà:

- invariantiva: moltiplicando o dividendo, quando è possibile, dividendo e divisore per uno stesso numero, il quoziente non cambia, mentre il resto, se c'è, viene moltiplicato o diviso per quel numero;
- distributiva: $(b + c): a = b: a + c: a$.

Inoltre vale l'importante ben nota proprietà

$$\boldsymbol{dividendo} = \boldsymbol{divisore} \cdot \boldsymbol{quoziente} + \boldsymbol{resto} \;\; (\boldsymbol{resto} < \boldsymbol{divisore}).$$

Infine si definisce la **potenza** con le seguenti proprietà

- additiva: $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$;
- sottrattiva: $a^b: a^c = a^{b-c}$ con $b > c$;
- moltiplicativa: $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$;

- distributiva: $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$ e $(a : b)^c = a^c : b^c$.

Il quinto assioma di Peano è generalmente espresso in un'altra forma ad essa perfettamente equivalente e lo si chiama **Principio di induzione**, che si enuncia nel seguente modo:

*Se una proprietà P(*ℕ) *vale per* $n = 1$ *e, se supposta vera per* n*, risulta vera per* $n + 1$*, allora P(*ℕ) *risulta vera per ogni* n*.*

Infatti, chiamiamo A l'insieme dei numeri naturali per i quali *P(*ℕ) è vera

$$A = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ è } vera\}.$$

Per ipotesi $P(1)$ è vera e quindi $1 \in A$. Inoltre se $P(n)$ è vera, $n \in A$, allora lo è anche $P(n + 1)$ e quindi $n + 1 \in A$. Per il quinto assioma $A = \mathbb{N}$ e cioè $P(n)$ è vera per ogni n.

Come esempio di applicazione del principio di induzione, dimostriamo la seguente

Disuguaglianza di Bernoulli

$$\boldsymbol{(1 + a)^n \geq 1 + n \cdot a \quad \forall a \epsilon \mathbb{R} \;\; e \; a \geq -1}.$$

Dim.

Per $n = 1$ abbiamo

$$1 + a \geq 1 + a \text{ che è vera.}$$

Supponiamola vera per n e dimostriamo che è vera anche per $n + 1$ e ciò vuol dire che

$$(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a.$$

Abbiamo supposto vera la relazione per un certo n e quindi

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Siccome $a \geq -1$, allora $1 + a \geq 0$. Moltiplichiamo ambo i membri della precedente disuguaglianza per il numero non negativo $1 + a$