

MATEMATICHE COMPLEMENTARI

FONDAMENTI, STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Direttore

Emilia FLORIO

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università della Calabria

Direttore onorario

Luigi MAIERÙ

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università della Calabria

Comitato scientifico

Aldo BRIGAGLIA

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Palermo

Bruno D'AMORE

NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica)
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Luca DELL'AGLIO

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università della Calabria

Martha Isabel FANDIÑO PINILLA

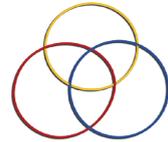
NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica)
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Massimo GALUZZI

Dipartimento di Matematica
Università degli studi di Milano

MATEMATICHE COMPLEMENTARI

FONDAMENTI, STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA



La matematica altri non è che il lato esatto del nostro pensiero.

Luitzen Egbertus Jan BROUWER

La collana è dedicata a studi e ricerche sui Fondamenti, sulla Storia e sulla Didattica della Matematica, dando rilievo agli aspetti culturali di questa disciplina, cogliendone le variegatissime espressioni e approfondendo la sua incidenza nella formazione umana e disciplinare. La collana, perciò, accoglie:

- studi sui Fondamenti della Matematica e la loro storia;
- ricerche di Storia della Matematica (sviluppo storico di idee e metodi, corrispondenze tra matematici, edizioni critiche di manoscritti, ecc. . .);
- proposte di percorsi dai contenuti storici a una loro riproposizione didattica;
- scritti di divulgazione dei contenuti matematici e della loro incidenza nello sviluppo di altre scienze;
- riflessioni sugli aspetti generali della Didattica della Matematica (dall'antropologia alle scienze psico-pedagogiche e alle neuroscienze);
- proposte di Didattica della Matematica relative a modalità differenti di attività didattiche in una classe di alunni;
- proposte di Didattica della Matematica con l'uso costante di nuove tecnologie.

Per l'eventuale inserimento in collana, ogni opera viene sottoposta alla valutazione del Comitato Scientifico e di esperti del settore, qualora necessario.

LUIGI MAIERÙ

LA GEOMETRIA TRA CREAZIONE E APOCALISSE





ISBN
979-12-5994-501-3

PRIMA EDIZIONE
ROMA 14 OTTOBRE 2021

- 9 *Introduzione*
- 15 **Capitolo I**
La geometria dal suo sorgere al suo declino. La geometria nella formazione e nell'insegnamento
1.1. Introduzione, 15 – 1.2. Geometria, Creazione, Apocalisse, 19 – 1.3. La geometria nella formazione e nell'insegnamento, 22
- 31 **Capitolo II**
Geometrie e forme dall'ordine alla bellezza nella lettura dell'universo
2.1. Introduzione, 31 – 2.2. Dall'ordine alla bellezza di una forma, 32 – 2.3. Geometrie e forme, 35 – 2.4. La geometria chiave di lettura del mondo e dell'universo, 48
- 55 **Capitolo III**
Il contesto dello sviluppo della geometria negli scritti di Euclide, di Archimede e di Apollonio
3.1. Introduzione, 55 – 3.2. Lo sviluppo della matematica dalla Scuola Pitagorica ad Euclide, 55 – 3.3. La composizione degli Elementi e degli altri scritti di Euclide, 74 – 3.4. Gli scritti matematici di Archimede, 81 – 3.5. Apollonio di Perga e la teoria delle coniche, 102 – 3.6. Alcuni cenni ad altri matematici coevi, 123
- 135 **Capitolo IV**
Dalla geometria alle geometrie, dalla creazione di una geometria alla sua apocalisse
4.1. Introduzione, 135 – 4.2. Dalla geometria alla medicina, alle scienze giuridiche, alla teologia, 136 – 4.3. Dall'universo fisico all'universo logico, dalla geometria alle geometrie, 145 – 4.4. Dalla creazione geometrica verso la sua apocalisse, 160 – 4.5. Esempio 1. Attorno alla somma degli angoli interni di un triangolo, 161 – 4.6. Esempio 2. Attorno all'angolo di tangenza, 165 – 4.7. Esempio 3. Dai poliedri platonici ai poliedri archimedei, dalla geometria verso l'algebra, 170 – 4.8. Esempio 4. La bellezza di una creazione geometrica attorno alla sezione della parabola, 184 – 4.9. Esempio 5. Dai triangoli euclidei ai triangoli non euclidei. Dalla geometria euclidea alle geometrie non euclidee, 193 – 4.10. Esempio 6. Dalla creazione dell'algebra al metodo analitico, 220 – 4.11. Esempio 7. Verso la costruzione dell'eptagono regolare nel cerchio, 241
- 257 *Conclusioni*

Introduzione

La ricerca attorno alla storia della matematica mi consente di fermare l'attenzione su molte tematiche, tra le quali un posto non secondario è rappresentato da alcuni aspetti della storia della geometria, quali il problema delle parallele, il problema attorno all'angolo di tangenza o di contatto, le costruzioni geometriche.

Approfondendo alcune di queste tematiche, prendo atto di come si evolve una problematica, dalla sua prima formulazione in uno specifico momento storico e culturale alle sue letture e interpretazioni in differenti contesti culturali successivi. L'analisi del passaggio da una situazione alle altre mette in luce aspetti culturali non trascurabili, riflettendo sui quali si conosce quale sia il contesto in cui è formulata una elaborazione e quale sia quello in cui avviene la sua eventuale interpretazione.

Su questi aspetti è opportuno fermare l'attenzione, poiché, sorvolandoli, sembra che ogni elaborazione veda la luce e si affermi senza alcuna connotazione che faccia comprendere quale sia l'ambiente in cui matura, prende forma e si interpreta. Ciò non è storicamente né culturalmente vero. Avere, perciò, consapevolezza di questi aspetti colloca ogni elaborazione nel proprio contesto culturale e in quello in cui avviene l'eventuale nuova lettura.

Se lo si ritiene opportuno, la stessa operazione può essere fatta attorno a ogni elaborazione matematica e a ogni idea (anche non matematica) affermata e diffusa nel corso degli anni o dei secoli.

Passano, così, davanti agli occhi diverse situazioni, non tutte classificabili totalmente e necessariamente all'interno della geometria tout court, essendo contaminate da elementi e idee di altre discipline, che trovano, però, all'interno della geometria le categorie culturali, semiotiche e linguistiche per essere più opportunamente interpretate.

Così, considerando ogni elaborazione geometrica dal suo nascere alla sua ultima interpretazione, non sembra fuori luogo racchiudere questo passaggio storico e culturale nei termini *creazione* e *apocalis-*

se, facendo riferimento, con il primo termine, al processo mentale che porta alla sua prima completa formulazione matematica e, con il secondo termine, alla sua ultima o più recente interpretazione o formulazione.

Questi termini, in verità, sono più propri del linguaggio religioso e teologico di popoli e civiltà che non del linguaggio scientifico. Ciò, però, non esclude che possano essere introdotti anche nel contesto scientifico generale, in quello della matematica in particolare, osservando che le elaborazioni e le idee matematiche nascono, si affermano, sono trasmesse, conoscendo talvolta momenti di stasi per poi essere riprese.

Probabilmente molti di noi hanno familiarizzato con questi termini sfogliando la Bibbia, in cui si parla in più libri della creazione e un cui libro ha il titolo *Apocalisse*. Motivo il ricorso a questa terminologia considerando che la Bibbia è uno scritto non estraneo al contesto culturale dell'Occidente.

I termini *creazione, creare, fare, ...*, risuonano, in particolare, nella duplice narrazione sull'origine dell'universo e della natura umana, contenuta nelle prime pagine del libro biblico della *Genesi*. Questi termini si incontrano, poi, in molte pagine dell'Antico e del Nuovo Testamento.

Attorno a questi termini si consolidano molte voci di un vocabolario che risente fortemente della cultura sapienziale. Questa, a sua volta, è espressa in una tradizione biblica antica, ripresa e riletta nel periodo ellenistico alessandrino, trovando qui il terreno fertile per raggiungere un grande sviluppo e le espressioni più alte.

Il riferimento a questo specifico periodo storico non è estraneo al contesto biblico, se si ha presente che ad Alessandria la comunità ebraica traduce i libri biblici dalla lingua ebraica in quella greca della koinè e che, secondo un'ipotesi molto accreditata, i libri scritti in lingua greca, che faranno poi parte dell'elenco (canone) dell'Antico Testamento, sono ivi composti. La traduzione dei primi e la composizione dei secondi libri risentono fortemente del contesto culturale di Alessandria della fine del sec. IV e di tutto il sec. I a. C.

Si discute molto tra gli studiosi sull'eventuale uso di questi termini nella cultura propria delle popolazioni che occupano la Palestina in questi secoli. Questo sembra essere un problema di poco conto, se si considera che la semantica degli stessi termini spinge a collocarli nel

contesto della cultura greca più antica, in cui sono redatti alcuni testi di natura filosofica e matematica, come, ad esempio, i *Dialoghi* di Platone.

Leggendoli, si è indotti a chiedersi quale sia l'origine delle idee matematiche, specificatamente di quelle geometriche, ivi espresse, se cioè siano esclusivamente quelle trasmesse dai Pitagorici o ve ne siano altre elaborate dai personaggi-attori di alcuni dialoghi.

Un altro esempio è dato dal *Commento al libro I degli Elementi* di Proclo (sec. V d. C.), in cui si afferma che il matematico crea nell'atto del suo *fare*, dove questo *fare* implica i tempi di riflessione, di studio e di elaborazione. Questo testo è redatto tenendo conto della tradizione matematica formatasi tra il sec. V a. C. e il sec. V d. C. Durante questi secoli si articola il vocabolario e si maturano le idee che fanno da fondamento e giustificano l'esistenza degli *Elementi* di Euclide (sec. IV-III a. C), motivandone le scelte e la formulazione, e sono pensati e scritti molti altri testi di matematica.

Considerando, poi, che la geometria offre una *forma* opportuna e appropriata per leggere la Terra e il cielo, il mondo, l'universo, allora ha senso non trascurare il rapporto tra la *geometria* e l'*universo*, all'interno del quale, da una parte, pensare una pluralità di mondi, logici o di pura espressione poetica, e, dall'altra, rendersi conto del ruolo della geometria, il cui vocabolario appropriato consente l'approccio a ognuno di questi mondi.

E, perciò, opportuno non trascurare la concezione di più mondi all'interno di un unico universo, espressa nel linguaggio poetico e filosofico, e ciò che si esprime per mezzo della riflessione matematica sull'esistenza di una o di più geometrie e sul legame che viene a crearsi tra queste.

La conoscenza dei percorsi storici evidenzia quando e come ciò è affermato e gradualmente formalizzato, fino a comprendere quale relazione esiste tra la geometria proiettiva e le geometrie euclidea e non euclidee.

L'analisi di questi percorsi mette sotto i nostri occhi come, quando e in che modo sono costruiti gli assi portanti che fanno comprendere il passaggio dalla geometria euclidea alle altre, facendo vedere come ognuna di queste è individuata nella sua specificità. Ciò avviene nel corso di un lungo periodo, che sfocia nell'Ottocento, in cui molte riflessioni arrivano a maturazione, esprimendo i risultati più rilevanti.

La ricerca di una *forma* geometrica per leggere fatti ed eventi porta a nuove formulazioni in tempi recenti, con le quali si passa dalla considerazione dell'estensione infinita a quella di situazioni particolari. L'esempio più evidente è dato dalla teoria delle catastrofi, fonte di un acceso dibattito su diversi fronti culturali esauritosi nell'arco di trentaquaranta anni, e dalla teoria dei frattali, le cui applicazioni sono oggetto di studio ancora oggi.

Quanto finora espresso contiene in sé anche ciò che racchiudo sotto il termine *apocalisse*, il cui significato originario indica la *rivelazione* di un fatto o di un evento non ancora manifestato o pensato. Tenendo presente il contenuto del libro biblico dell'*Apocalisse*, la rivelazione riguarda la conclusione e la distruzione di un mondo e la nascita di un mondo nuovo non immaginato né immaginabile prima.

È in questo significato più complesso che faccio uso di questo termine, in cui racchiudo ogni nuova interpretazione o formulazione di un'elaborazione geometrica.

Indicherò meglio nel seguito quale significato attribuisco a questo termine.

Ho fatto riferimento in termini generali alla storia, la cui lettura fa conoscere un complesso quadro con tante criticità. L'attenzione a questo quadro, però, non deve fare perdere di vista una problematica fondamentale attorno al ruolo formativo della geometria, presente in tutti i curricula. Le conoscenze geometriche acquisite forniscono a ciascuno il vocabolario necessario per leggere il proprio mondo e ciò che è in esso e fuori di esso.

Essendomi occupato in altri scritti della maggior parte delle problematiche a cui ho fatto cenno, dando precise indicazioni bibliografiche di fonti primarie e secondarie, nei fogli che seguono mi limiterò semplicemente a parlarne e richiamarle.

Presenterò alcune riflessioni che presuppongono una conoscenza a grandi linee della storia della geometria e, in questa, di quelle problematiche connesse ad aspetti discussi a più riprese nel corso dei secoli.

Richiamerò aspetti culturali che sostengono e fanno da contesto alle elaborazioni geometriche. Cercherò di spigolare qua e là tra testimonianze che talvolta vanno al di là di una trattazione geometrica in senso stretto.

Il mio è il tentativo di dare uno sguardo all'indietro ad alcuni percorsi culturali affrontati nel corso delle ricerche storiche. Ciò permette di dare rilievo a osservazioni e riflessioni rimaste al margine dei tentativi di ricostruzioni di fatti ed eventi che hanno costituito l'ossatura portante della storia della geometria.

Le riflessioni proposte dovrebbero indurre a dare spazio temporale e mentale a questioni, discussioni, elaborazioni, alcune delle quali molto note, senza altra pretesa se non quella della pura condivisione.

La geometria dal suo sorgere al suo declino La geometria nella formazione e nell'insegnamento

1.1. Introduzione

I termini *geometria*, *geometrico*, ..., appartengono al vocabolario quotidiano di coloro che hanno ricevuto un minimo di formazione culturale seguendo un qualunque percorso scolastico. Il retroterra culturale di questo vocabolario matura nel corso di alcuni secoli tra le sponde del Mare Mediterraneo e da qui si estende in ogni direzione.

Il significato di questi termini è ben al di là delle loro radici semantiche, *geo* e *metria*, con cui si tiene unita la terra o lo spazio circostante con il misurare. Come una tradizione attesta, essi sono per la prima volta uniti insieme nell'Alto Egitto per indicare l'opera messa in atto affinché, dopo una esondazione a cui andava soggetto il Nilo periodicamente, la terra fosse riconsegnata a coloro che legittimamente potessero continuare a coltivarla senza nulla perdere rispetto all'assegnazione precedente l'alluvione.

Questi termini, trapiantati in Grecia da Pitagora e da Talete, che hanno una conoscenza diretta della cultura egiziana del tempo, e introdotti nel contesto culturale della Grecia antica, che è in formazione, svuotati del loro significato originario, assumono gradualmente la connotazione giunta fino a noi. Essi sono scelti per indicare la specifica creazione di matematica in cui, prendendo in considerazione lo spazio, si articola un discorso attraverso definizioni, postulati e proposizioni.

Ciò comporta una duplice traduzione.

La prima è di natura strettamente linguistica, in cui questi termini passano dalla lingua primigenia, l'egiziana, a uno dei dialetti che nel

tempo danno spessore alla lingua greca parlata e scritta nella Grecia continentale, specificamente nella regione dell'Attica, e nelle diverse isole. Il dialetto dorico, che è la lingua franca patrimonio dei coloni che vagano nel Mare Mediterraneo, li trasporta su altre sponde assieme ad altre conoscenze ed espressioni di vita. Infine, passano alla lingua greca ellenistica specifica della koiné.

La seconda è di natura semantica. Nell'esplicitarsi del percorso culturale dall'Egitto alla Grecia e alle colonie, questi termini assumono un significato consolidato e sicuro, anche se si continua a riflettere sul ruolo che le definizioni, i postulati e le proposizioni hanno nel loro reciproco concatenarsi. Ciò è attestato da testimonianze della Scuola Pitagorica ed Eleatica, come leggiamo in frammenti, anche se tardivi rispetto agli eventi, dei *Dialoghi* di Platone e di alcuni scritti di Aristotele, prima di vedere la loro consacrazione negli *Elementi* di Euclide, tramite cui si diffondono per ogni dove e attraverso le generazioni.

Negli *Elementi* euclidei e in altri scritti di matematici coevi e posteriori i contenuti geometrici sono presentati seguendo uno stile e una forma epistemologica consolidata che nel corso dei secoli non è messa in discussione se non in alcune sue parti o per qualche suo aspetto, come si registra attorno al significato delle definizioni, al ruolo di un postulato o alla dimostrazione di un teorema e alla soluzione di un problema.

Esistono anche altri scritti del periodo greco antico ed ellenistico che mettono in luce il contributo di alcuni matematici all'individuazione e alla specificazione dei contenuti della geometria del piano e dello spazio.

Prima della formazione degli *Elementi* euclidei, nella cultura del tempo è molto chiaro il ruolo della geometria e dell'aritmetica e del legame esistente tra esse.

Non è possibile considerare i contenuti geometrici se non si dispone di una chiara visione del *misurare* e del *calcolare*, di cui l'aritmetica ne specifica il senso e le proprietà. Questi costituiscono gli strumenti che consentono di dare una lettura del *continuo* proprio della geometria.

Il *misurare* e il *calcolare* assumono senso nel momento in cui è chiarito cosa sia il *numero* considerato anche nella sua entità ontologica, tanto da essere ritenuto a fondamento di ogni realtà. Lo si ritrova

così, nel sapere geometrico, in quello astronomico, in quello musicale, in quello della filosofia naturale, ...

Ciò dà una struttura organica e funzionale alla trattazione degli enti della geometria, specificati almeno nelle loro proprietà essenziali e coordinati tra loro, tanto da esprimere un'unica *forma*. Questa, poi, è considerata uno strumento culturale idoneo a dare una lettura del mondo, della terra e del cielo in termini quantitativi, diventando il *modello* per interpretarli e leggerli, superando tutte le altre letture date in termini puramente descrittivi e qualitativi.

Il carattere *continuo* del piano e dello spazio è una proprietà geometrica che consente a questo modello di avere una formidabile consistenza, che sembra toccare il metafisico e l'ontologico, dove ogni fatto o evento della terra e del cielo può essere letto nei termini della loro estensione e valutato secondo termini che vanno al di là del discreto.

Di esso ne sono esplicitate le proprietà (ciò sarà ripreso in diversi momenti storici) e individuati alcuni problemi non risolti, consegnati alle generazioni future. Questi problemi vanno da quello circa il senso del *carattere continuo* del piano e dello spazio a quelli *della sommabilità e della divisibilità del continuo* considerato nella sua accezione generale. Questi sono problemi che introducono a pieno titolo una riflessione circa l'*infinito* e l'*indefinito*, realtà che sembrano sfuggire all'ambito della metafisica e della ontologia per rifugiarsi e rimanere oggetto della riflessione dei matematici e dei filosofi per tanti secoli.

Queste riflessioni costituiscono la premessa per rendersi conto del percorso costante e consistente che si compie attorno alla geometria almeno dai secc. VI-V a. C. in poi. Soprattutto nei primi secoli si assiste alla generazione e alla specificazione dei differenti oggetti della geometria del piano e dello spazio. Ciò costituisce un'unità organica, ripensata e rielaborata costantemente nel corso dei secoli, anche dopo la composizione e la diffusione degli *Elementi* euclidei, presi in un tempo posteriore a prototipo di ogni trattazione di natura geometrica con una finalità formativa.

Questa è un'operazione umana che può essere racchiusa sotto il termine *creazione*, con cui si mette in evidenza ciò che il *matematico fa* nell'atto in cui esplicita il lavoro della sua mente attorno a un oggetto esteso. La sua azione non implica alcunché di metafisico né di fisico, poiché, seguendo un dettato antico, la sua azione è espletata generalmente attorno agli oggetti della filosofia naturale, liberati da

tutte le loro caratteristiche (colore, materia, consistenza, spessore, ...), prendendo in considerazione solo la loro estensione. Questi oggetti, così, sono conosciuti e studiati nelle loro entità essenziali e nelle loro proprietà, dandone una presentazione che abbia la solidità della metafisica, passando per gli aspetti semiotici e linguistici che danno consistenza a ogni espressione. Come è ovvio, questa è una collocazione *ideale* del lavoro del matematico, verso cui si tende nel momento in cui se ne riconosce la specificità, la cui natura è eminentemente intellettuale, e lo si distingue da quello che ha per oggetto la metafisica e la filosofia naturale all'interno di una riflessione generale che passa alla storia come *filosofia*.

Così, nel contesto dei metafisici e dei fisici è riconosciuto il lavoro del matematico, la sua figura è attorniata di stima, la sua azione è indicata come un *fare*. Ancora oggi, anche dopo avere assistito a tanti cambiamenti di prospettiva nella trattazione degli oggetti della matematica in generale e della geometria nello specifico, l'opera del matematico è indicata come un *fare* di natura eminentemente intellettuale. In questi termini è indicata un'azione soprattutto della mente, preparata e sostenuta dalle altre facoltà della persona umana, a cominciare dall'immaginazione e dalla fantasia. Questa azione non si esaurisce in un istante come se fosse conseguenza dell'illuminazione di un dio o di un demiurgo, come talvolta si affermava nell'antichità. Essa impegna, ieri come oggi, persone che decidono di dedicarle tempo ed energie, tanto da farla diventare il loro lavoro. Ho l'impressione, consolidata da testimonianze e da reazioni, che nel contesto sociale il lavoro dei matematici, anche se stimato, sia ritenuto poco allettante in ragione dell'asperità del percorso formativo, pur non escludendo e non mettendo in dubbio la sua preziosità.

Questo *fare* attorno a un oggetto matematico in generale e geometrico in particolare comincia con la riflessione su un concetto che, nel tempo, diventa un'idea da trasmettere secondo modalità che ne garantiscano una presentazione puntuale e completa.

Questa modalità è racchiusa nel termine *epistemologia*, i cui elementi costitutivi vertono attorno all'individuazione dell'oggetto, dandone la descrizione che fin dall'antichità è indicata come *termine* (di un vocabolario) o *definizione*, alla specificazione dei suoi caratteri essenziali in una o più proposizioni indicate come *postulati*, esplicitandone le proprietà in proposizioni chiamate *teoremi* da dimostrare ed

esponendo qualche aspetto non chiarito fino in fondo in proposizioni dette *problemi* da risolvere.

1.2. Geometria, Creazione, Apocalisse

Il *fare* del matematico è un atto creativo, che esprime la conoscenza di un oggetto nella sua realtà matematica, totalmente e completamente o in una delle sue parti. Con questo fare si dà *esistenza matematica* all'*oggetto* in modo definitivo.

L'*oggetto*, così, comincia a esistere dal momento della sua creazione. Questo *fatto* non si realizza in un istante, poiché richiede un tempo più o meno lungo di studio e di riflessione, durante il quale ci si può servire anche di conoscenze e di strumenti, individuati e specificati in un tempo precedente.

Ciò che si realizza nella matematica consente di affermare che *ogni oggetto della geometria è generato da un atto creativo*.

Possiamo, inoltre, dire che l'insieme di più oggetti considerati nello stesso contesto organico individua una *geometria*. Possiamo, così, parlare della *geometria della retta*, della *geometria del piano* o della *geometria dello spazio*.

Poiché è storicamente possibile individuare differenti contesti organici di oggetti geometrici, ci si trova di fronte a *geometrie*. L'esempio più conosciuto è relativo alla *geometria euclidea* e alle *geometrie non euclidee*.

Una domanda non trascurabile verte attorno alla trasmissione di una elaborazione geometrica.

Percorrendo la storia della matematica ci rendiamo conto che ogni elaborazione completa in ogni sua parte presenta risultati che esprimono caratteri universali, anche se espressi nel linguaggio proprio del tempo in cui l'elaborazione è articolata.

Quando, poi, questa elaborazione viene ripresa totalmente o in parte in un tempo posteriore, viene ripensata in conformità alla cultura matematica nel frattempo maturata e condizionata dalla visione semiotica e dal linguaggio specifico di quel momento.

Questa è un'operazione totalmente legittima, poiché in ogni periodo storico ogni elaborazione umana, qualunque sia il suo carattere, è letta, è espressa e trova valore nel contesto culturale specifico del momento storico. Di questo contesto è possibile individuare quali sia-

no i processi cognitivi, semiotici, semantici e linguistici che ne strutturano ogni espressione. Questi processi, a loro volta, possono presentare caratteristiche comuni con il momento precedente e caratteristiche nuove relativamente all'oggetto trasmesso.

Avvenuto questo processo, a cui è assoggettata eventualmente un'elaborazione storicamente datata, si ottiene un risultato che presenta tutti i caratteri di una elaborazione appena creata.

Ciò si realizza anche per ogni elaborazione geometrica nell'atto della sua trasmissione da un momento storico a un altro e nell'atto della sua recezione in un momento successivo o in uno molto distante dal primo. Così, un'elaborazione geometrica posteriore può essere letta come un'interpretazione creativa della precedente, tradotta in un contesto differente.

Quest'ultima, confrontata con la precedente, può essere ritenuta come la sua *immagine apocalittica*, dove con il termine *apocalisse* non intendo l'annientamento della prima elaborazione, sostituita a sua volta dalla successiva, ma ogni sua successiva interpretazione creativa, che comporta il mantenimento di pochi o molti elementi dell'elaborazione precedente fino al suo totale superamento, tanto che l'ultima elaborazione sembra avere poco o nulla in comune con la prima.

Non è fuori luogo, perciò, pensare che *ogni elaborazione geometrica* possa essere collocata tra la sua *creazione* e la sua *apocalisse*.

Questi termini, *creazione* e *apocalisse*, pur appartenendo al linguaggio teologico e religioso, possono dare un'opportuna collocazione *culturale* e *storica* a ogni elaborazione geometrica, che indichiamo semplicemente con il termine *geometria*.

Con il termine *creazione* indico l'*atto fondativo* di una geometria, cioè l'azione messa in atto dal matematico che concepisce, genera ed esplicita un'elaborazione geometrica dalla sua concezione al suo completamento culturale.

Con il termine *apocalisse* indico l'azione con cui è ripresa una precedente elaborazione, reinterpretata e letta nel contesto culturale proprio di un successivo momento storico, dandole senso in esso in un modo epistemologicamente significativo e nella piena libertà di scelta di appropriati registri semiotici e linguistici.

Così assume un significato pieno anche in questo nuovo contesto storico l'espressione *vi saranno una terra nuova e un cielo nuovo* utilizzata da Giovanni nel libro biblico dell'*Apocalisse*.