aracne

LUCIANO AMITO LOMONACO

GEOMETRIA E ALGEBRA

VETTORI, EQUAZIONI E CURVE ELEMENTARI

SECONDA EDIZIONE

aracne

aracne

ISBN
979–12–5994–370–5

PRIMA EDIZIONE
ROMA 29 SETTEMBRE 2021

allo staff medico di casa mia

Qui non si trattano solo tematichematematichematematichemetàmatematichemetàmetamatematiche

(s. rao)

Indice

Premessa

In questo testo ho provato ad esporre in modo sintetico i principali argomenti di base di Algebra Lineare e di Geometria, cercando di mantenere un livello accettabile di rigore formale. L'opera è indirizzata a studenti del primo anno di corsi di laurea in Matematica, Fisica, Informatica e Ingegneria.

Al lettore è richiesta una certa familiarità con alcuni argomenti di base quali l'insiemistica (insiemi, coppie ordinate, relazioni ed applicazioni) e la costruzione degli insiemi numerici (numeri naturali, interi, razionali, reali, complessi).

In questa nuova edizione, riveduta ed ampliata, ho scelto di modificare integralmente l'esposizione relativa ai *determinanti*. Solo poche dimostrazioni sono state omesse, per non appesantire eccessivamente il testo.

Avrei tanti ringraziamenti da fare. Mi limiterò a menzionare gli amici Maurizio Brunetti, Bruno Buonomo, Giovanni Cutolo, Francesco Della Pietra, Carlo Nitsch e Rocco Trombetti, che hanno collaborato con me a vario titolo.

Luciano A. Lomonaco

Capitolo 1

Strutture algebriche

1.1 Richiami

Si assume che il lettore abbia già una certa familiarità con l'insiemistica (insiemi, sottoinsiemi, relazioni di appartenenza e di inclusione, implicazioni, coppie ordinate) e conosca i seguenti simboli standard:

$$\emptyset\,,\ \in\,,\ \subseteq\,,\ \subset\,,\ \Leftarrow\,,\ \Rightarrow\,,\ \Leftrightarrow\,,\ \forall,\ \exists,\ \exists!\,,\ |\,,\ :\,,$$

nonché gli insiemi numerici più comuni, quali ad esempio i numeri naturali $\mathbb{N}$, gli interi $\mathbb{Z}$, gli interi non negativi $\mathbb{N}_0$, i razionali $\mathbb{Q}$, i reali $\mathbb{R}$, i complessi $\mathbb{C}$, e l'insieme $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali. Useremo nel seguito i connettivi logici $\wedge$ (*congiunzione*) e $\vee$ (*disgiunzione inclusiva*). I simboli $\mathbb{R}^+$ ed $\mathbb{R}_0^+$ indicheranno i reali positivi ed i reali non negativi.

Consideriamo un insieme non vuoto Y. Indicheremo con $\mathcal{P}(Y)$ il corrispondente insieme delle parti, ovvero

$$\mathcal{P}(Y) = \left\{ X \;\middle|\; X \subseteq Y \right\} .$$

Diremo che il sottoinsieme $X \subseteq Y$ è una parte *propria* di Y se non coincide con Y, e cioè se $X \subset Y$.

Siano A, B due insiemi. Costruiamo un nuovo insieme, il prodotto cartesiano di A e B, indicato con il simbolo $A \times B$, costituito da tutte le coppie ordinate con prima componente in A e seconda in B, ovvero

$$A \times B = \left\{ (a, b) \;\middle|\; a \in A\,,\ b \in B \right\} .$$

Osserviamo che

$$A = \emptyset \ \vee\ B = \emptyset \ \Rightarrow\ A \times B = \emptyset\ .$$

In modo analogo si può procedere per definire il prodotto cartesiano di più di due insiemi, usando le *terne*, *quadruple*, o, più in generale *n-ple* di elementi.

Ad esempio, se n è un numero naturale e $A_1, \dots, A_n \neq \emptyset$, definiamo il prodotto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ di tali insiemi ponendo

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \left\{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \;\middle|\; a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2,\ \dots\ ,\ a_n \in A_n \right\} .$$

Se gli insiemi in questione sono tutti uguali, ad esempio $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, scriveremo A^n per indicare tale prodotto, che sarà detto n-ma *potenza cartesiana* di A. Avremo quindi

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ copie}} = \left\{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \;\middle|\; a_1, a_2, \dots, a_n \in A \right\} .$$

Quando $n = 2$ si parla di *quadrato cartesiano*. Se $n = 1$ la potenza cartesiana A^1 è identificata con A. Introduciamo ora la nozione di corrispondenza tra due insiemi, che ci permetterà di sviluppare il concetto di relazione in un insieme e di applicazione tra due insiemi.

1.1 Definizione. *Siano $A, B \neq \emptyset$. Una corrispondenza h di A in B è una coppia $(A \times B, G)$, dove G è un sottoinsieme di $A \times B$. G si dice grafico della corrispondenza. Se la coppia $(x, y) \in G$, si dice che l'elemento y di B corrisponde all'elemento x di A, e si scrive $x\ h\ y$.*

Osserviamo esplicitamente che un elemento x di A può non avere alcun corrispondente in B, oppure averne più d'uno. Definire una corrispondenza h equivale a specificare, per ogni $x \in A$, quali elementi di B corrispondono ad x, ovvero per quali elementi $y \in B$ accade che $x\ h\ y$.

1.2 Esempio. *Sia $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}_0^+$, e definiamo il sottoinsieme*

$$G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \;\middle|\; x^2 = y \right\} .$$

La corrispondenza h di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}_0^+$ di cui G è il grafico è tale che $(0, 0) \in G$, ovvero $0\ h\ 0$, o ancora 0 corrisponde a 0, ed anche $(1, 1), (-1, 1) \in G$, ovvero $1\ h\ 1$ e $-1\ h\ 1$, o ancora 1 corrisponde sia a 1 che a -1.

1.3 Esempio. *Sia $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}_0^+$, e definiamo il sottoinsieme*

$$G' = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \;\middle|\; x = y^2 \right\} .$$

La corrispondenza h' di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}_0^+$ di cui G è il grafico è tale che $(4, 2) \in G'$, ovvero $4\ h'\ 2$, o ancora 2 corrisponde a 4, ma $-2\ \not{h}'\ y$, ovvero $(-2, y) \notin G'$, per ogni $y \in \mathbb{R}_0^+$. In altri termini, non esiste alcun elemento di $\mathbb{R}_0^+$ che corrisponde all'elemento $-2 \in \mathbb{R}$.

Ci sono due casi particolari molto importanti.

1.4 Definizione. *Sia $A \neq \emptyset$. Una relazione (binaria) h in A è una corrispondenza di A in A stesso.*

1.5 Definizione. *Siano* $A, B \neq \emptyset$. *Un'applicazione* h *di* A *in* B *è una corrispondenza che gode della seguente proprietà:*

$$\forall\, x \in A\ \exists!\ y \in B \;\Big|\; x\ h\ y\ .$$

Scriveremo, in tale situazione, $h(x) = y$ *e diremo che* y *è l'immagine di* x *(mediante* h*). Spesso si utilizza il simbolo* $h : A \to B$*, e gli insiemi* A, B *sono detti rispettivamente* dominio *e* codominio *di* h*.*

Studiamo ora alcune questioni riguardanti le relazioni.

1.6 Definizione. *Consideriamo una relazione* h *nell'insieme non vuoto* A*.*

- h *si dice riflessiva se per ogni* $x \in A$ *accade che* $x\ h\ x$*;*
- h *si dice simmetrica se per ogni* $x, x' \in A$ *vale la seguente implicazione:*

$$x\ h\ x' \;\Rightarrow\; x'\ h\ x\ ;$$

- h *si dice antisimmetrica se per ogni* $x, x' \in A$ *vale la seguente implicazione:*

$$x\ h\ x' \;\wedge\; x'\ h\ x \;\Rightarrow\; x = x'\ ;$$

- h *si dice transitiva se per ogni* $x, x', x'' \in A$ *vale la seguente implicazione:*

$$x\ h\ x' \;\wedge\; x'\ h\ x'' \;\Rightarrow\; x\ h\ x''\ .$$

Siamo interessati a due tipi di relazioni.

1.7 Definizione. *La relazione* h *si dice* relazione d'equivalenza *se è riflessiva, simmetrica e transitiva.*

1.8 Definizione. *La relazione* h *si dice* relazione d'ordine *se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva.*

Vediamo ora qualche questione riguardante le relazioni d'equivalenza.

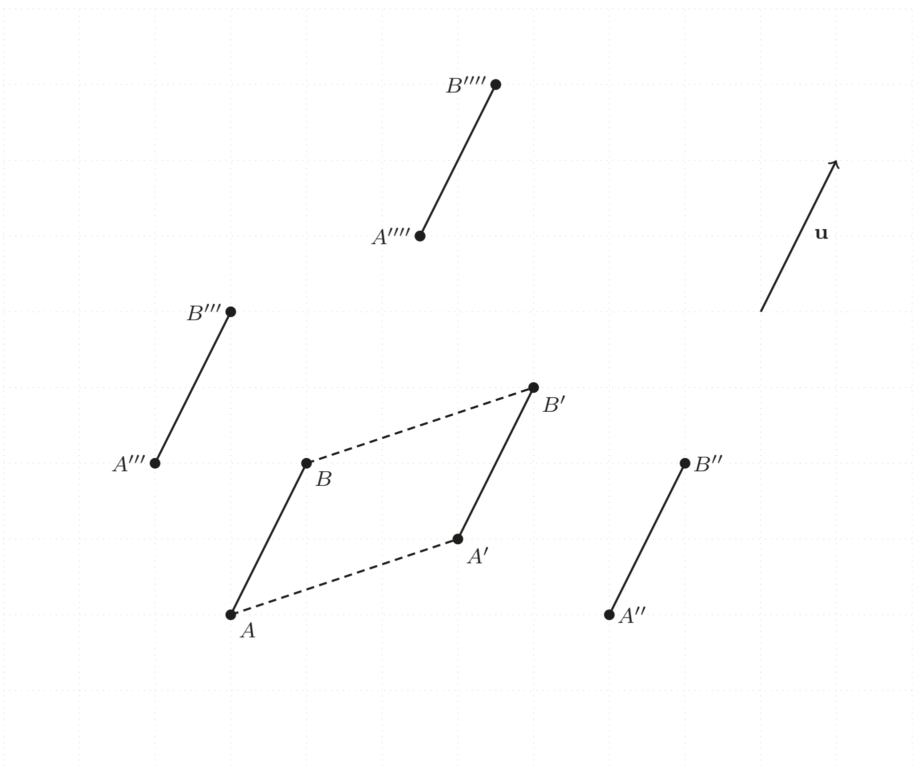
1.9 Definizione. *Sia* h *una relazione d'equivalenza nell'insieme non vuoto* A*. Per ogni* $x \in A$*, si dice classe d'equivalenza di* x *il sottoinsieme*

$$[x] = \left\{\, x' \in A \;\middle|\; x\ h\ x' \,\right\}\ .$$

È chiaro che $x \in [x]$, in quanto $x\ h\ x$. Ogni elemento di $[x]$, e quindi anche x stesso, si dice *rappresentante* della classe. Si vede facilmente che l'unione delle classi d'equivalenza è proprio A, e che se $a, b \in A$ possono presentarsi due casi: $[a] = [b]$ (quando $a\ h\ b$), oppure $[a] \cap [b] = \emptyset$ (quando $a \not h\ b$). Tale situazione si esprime dicendo che le classi d'equivalenza costituiscono una partizione di A. Un simbolo usato di frequente per le relazioni d'equivalenza è $\equiv$.

1.10 Definizione. *Sia h una relazione d'equivalenza nell'insieme non vuoto A. L'insieme delle classi d'equivalenza rispetto a tale relazione si dice insieme quoziente di A rispetto ad h, e si denota con il simbolo A/h.*

1.11 Esempio. *Sia $\mathbb{E}^2$ il piano della geometria elementare e consideriamo l'insieme Σ dei segmenti orientati di $\mathbb{E}^2$. Se $\sigma \in \Sigma$ è un segmento di primo estremo A e secondo estremo B, indicheremo tale segmento con il simbolo $\sigma(A, B)$ oppure AB. Sia $\tau = \tau(A', B')$ un altro segmento. Ricordiamo che σ è equipollente a τ (in simboli $\sigma \equiv \tau$) se e solo se il quadrilatero $ABB'A'$ è un parallelogramma (eventualmente degenere). Osserviamo che la relazione di equipollenza è una relazione di equivalenza in Σ. Denotiamo con V^2 l'insieme quoziente $\Sigma/\equiv$. Un elemento di V^2 sarà detto* vettore libero ordinario *ed è una classe di segmenti equipollenti.*



Nella figura è evidenziato che $AB \equiv A'B'$, in quanto $ABB'A'$ è un parallelogramma e i segmenti AB, $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$, $A''''B''''$ sono tutti equipollenti tra loro. Ad esempio il quadrilatero $ABB''''A''''$ è un parallelogramma degenere. Il vettore libero $\mathbf{u}$ è la classe di ognuno di tali segmenti orientati, e si ha

$$\mathbf{u} = \{ AB, A'B', A''B'', A'''B''', A''''B'''', \dots \} .$$

Se ad esempio $\mathbf{u} \in V^2$ e AB è un rappresentante di $\mathbf{u}$, scriveremo $\mathbf{u} = [AB]$. Ricordiamo che invece il segmento AB è talvolta chiamato vettore applicato, *con punto di applicazione A e secondo estremo B e che per ogni vettore libero ordinario $\mathbf{u} \in V^2$ e per ogni $P \in \mathbb{E}^2$ esiste un unico $Q \in \mathbb{E}^2$ tale che $\mathbf{u} = [PQ]$.*

1.12 Esempio. *Consideriamo l'insieme numerico $\mathbb{Z}$ degli interi. In esso definiamo una relazione $\equiv$ ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b \iff a - b$ è un numero pari. Si verifica agevolmente che $\equiv$ è una relazione d'equivalenza, e che le classi di equivalenza sono esattamente due: il sottoinsieme $\mathbb{P}$ dei numeri pari e il sottoinsieme $\mathbb{D}$ dei numeri dispari. Pertanto l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\equiv$ consta di due elementi.*

1.13 Esempio. *Sia A l'insieme dei deputati della Repubblica Italiana in un fissato istante t_0. In A definiamo una relazione $\equiv$ ponendo, per ogni $a, b \in A$, $a \equiv b$ se e solo se i deputati a e b appartengono allo stesso gruppo parlamentare. La relazione $\equiv$ è d'equivalenza, e le classi di equivalenza sono proprio i gruppi parlamentari. Pertanto l'insieme quoziente $A/\equiv$ è l'insieme dei gruppi parlamentari (all'istante t_0).*

1.14 Esempio. *Sia X un insieme non vuoto e sia $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Consideriamo ora l'insieme $A = X^n$, la potenza cartesiana n-ma dell'insieme X. In A definiamo una relazione σ al modo seguente. Due n-ple sono in relazione se e solo se l'una si ottiene dall'altra mediante una permutazione dell'ordine in cui gli elementi compaiono. Ad esempio, in $\mathbb{R}^3$ (cioè con $X = \mathbb{R}$, e $n = 3$), abbiamo $(3, 5, 7)\ \sigma\ (3, 7, 5)$, o anche $(1, 1, 2)\ \sigma\ (2, 1, 1)$. Osserviamo esplicitamente che una particolare permutazione è quella identica, quella cioè che lascia ogni elemento al suo posto. Quindi, ad esempio, $(3, 5, 7)\ \sigma\ (3, 5, 7)$. Si verifica che σ è una relazione d'equivalenza in X^n. Una classe di equivalenza si dice* orbita *in X^n (rispetto all'azione di permutazione), o, più spesso,* sistema *di elementi di X, di ordine n. In un sistema sono quindi rilevanti le eventuali ripetizioni, ma non è rilevante l'ordine in cui compaiono gli elementi. Talvolta, per indicare che un certo elemento x compare t volte in un sistema, si dice che x ha molteplicità t in tale sistema.*

Passiamo ora alle relazioni d'ordine.

1.15 Definizione. *Sia h una relazione d'ordine nell'insieme non vuoto A. Tale relazione si dice* totale *se per ogni $x, x' \in A$ si ha che $x\ h\ x' \ \vee\ x'\ h\ x$.*

1.16 Esempio. *Sia Y un insieme non vuoto e sia $A = \mathcal{P}(Y)$, l'insieme delle parti di Y. In A consideriamo la relazione $\subseteq$ di inclusione. È agevole verificare che essa è una relazione d'ordine. Non si tratta però di un ordine totale. Consideriamo ad esempio la seguente situazione. Sia $Y = \{a, b, c, d\}$ e consideriamo i sottoinsiemi $S = \{a, b, c\}$, $T = \{c, d\}$. Abbiamo che $S \nsubseteq T\ \wedge T \nsubseteq S$.*

1.17 Esempio. *Nell'insieme $A = \mathbb{R}$ dei numeri reali, consideriamo la ben nota relazione $\leq$. Essa è una relazione d'ordine e si tratta di un ordine totale. Osserviamo che possiamo definire* *un'analoga relazione d'ordine su* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

1.18 Esempio. *Nell'insieme* $A = \mathbb{R}^2$, *consideriamo la relazione* $\triangleleft$ *definita come segue. Per ogni* $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ *poniamo* $(a, b) \triangleleft (c, d)$ *se e solo se* $a \leq c$. *Tale relazione non è una relazione d'ordine. Infatti sono verificate le proprietà riflessiva e transitiva, ma la proprietà antisimmetrica non è verificata. Ad esempio, si ha che* $(1, 2) \triangleleft (1, 3)$ *e* $(1, 3) \triangleleft (1, 2)$, *ma ovviamente* $(1, 2) \neq (1, 3)$.

1.19 Esempio. *Nell'insieme* $A = \mathbb{R}^2$, *consideriamo la relazione* $\preceq$ *definita come segue. Per ogni* $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ *poniamo* $(a, b) \preceq (c, d)$ *se e solo se* $a \leq c \ \wedge \ b \leq d$. *Tale relazione è una relazione d'ordine (non totale).*

A livello intuitivo possiamo prendere la relazione $\subseteq$ come prototipo di relazione d'ordine, e $\leq$ come prototipo di relazione d'ordine totale. Nelle relazioni d'ordine totale abbiamo il concetto intuitivo di elemento massimo, o minimo, dell'insieme o di una sua parte, che comunque definiremo in modo preciso. Se la relazione d'ordine non è totale, è più utile introdurre un altro concetto, quello di elemento massimale, o minimale, ricordando che se un elemento è massimo (o minimo), esso è anche massimale (minimale rispettivamente). Usiamo il simbolo $\preceq$ per indicare una generica relazione d'ordine.

1.20 Definizione. *Sia* $\preceq$ *una relazione d'ordine nell'insieme non vuoto* A. *Sia inoltre* B *un sottoinsieme non vuoto di* A *e consideriamo un suo elemento* m. *Diremo che* m *è massimale in* B *(rispetto alla relazione* $\preceq$*) se per ogni* $x \in B$, $x \neq m$, *si ha che* $m \not\preceq x$. *L'elemento* m *sarà invece detto minimale in* B *se per ogni* $x \in B$, $x \neq m$, *si ha che* $x \not\preceq m$.

1.21 Definizione. *Sia* $\preceq$ *una relazione d'ordine nell'insieme non vuoto* A. *Sia inoltre* B *un sottoinsieme non vuoto di* A *e consideriamo un suo elemento* m. *Diremo che* m *è massimo in* B *(rispetto alla relazione* $\preceq$*) se per ogni* $x \in B$ *si ha che* $x \preceq m$. *L'elemento* m *sarà invece detto minimo in* B *se per ogni* $x \in B$ *si ha che* $m \preceq x$.

Non sempre esiste un massimo (minimo risp.), ma quando ciò accade, tale elemento è unico. Se la relazione d'ordine è totale, un elemento massimale è anche massimo, ed un elemento minimale è anche minimo.

1.22 Esempio. *Consideriamo l'insieme* $Y = \{a, b, c, d\}$, *sia* $A = \mathcal{P}(Y)$. *Sia* B *il sottoinsieme di* A *costituito da tutte e sole le parti proprie di* Y:

$$B = A - \{Y\} = \{\, Z \in \mathcal{P}(Y) \mid Z \neq Y \,\} = \{\, Z \in \mathcal{P}(Y) \mid Z \subset Y \,\} \ .$$

Consideriamo in B *la relazione* $\subseteq$ *di inclusione. Il sottoinsieme* $S = \{a, b, c\}$ *di* A *è un elemento di* B, *ed è massimale in* B, *ma non massimo. Osserviamo che ogni sottoinsieme di* Y *con tre elementi gode della stessa proprietà.*

Affrontiamo ora lo studio delle applicazioni. Consideriamo quindi un'applicazione $f : A \to B$. Se $x \in A$ e $y = f(x) \in B$, scriveremo anche, talvolta, $x \mapsto y$. Il sottoinsieme

$$\operatorname{im} f = f(A) := \left\{ y \in B \;\middle|\; \exists\, x \in A \;\middle|\; y = f(x) \right\} \subseteq B$$

si dice *immagine* di f. Può accadere che $\operatorname{im} f = B$ oppure che $\operatorname{im} f \subset B$. Inoltre, se $y \in \operatorname{im} f$, può accadere che sia unico l'elemento $x \in A$ tale che $y = f(x)$, oppure possono esistere vari elementi $x, x', x'', \dots \in A$ tali che

$$y = f(x) = f(x') = f(x'') \ \dots$$

cioè y può essere immagine di vari elementi del dominio. Per ogni $y \in B$ è definito un sottoinsieme di A, detto controimmagine di y mediante f e denotato con il simbolo $f^{-1}(y)$, al modo seguente:

$$f^{-1}(y) = \left\{ x \in A \;\middle|\; f(x) = y \right\} .$$

1.23 Osservazione. *È bene tener presente che*

- *Il sottoinsieme $f^{-1}(y)$ può essere vuoto;*
- $f^{-1}(y) \neq \emptyset \iff y \in \operatorname{im} f;$
- *Se $f^{-1}(y) \neq \emptyset$, esso può essere costituito da uno o più elementi del dominio A.*

Più in generale, se $Y \subseteq B$ è un sottoinsieme del codominio, si definisce controimmagine di Y il sottoinsieme

$$f^{-1}(Y) = \left\{ x \in A \;\middle|\; f(x) \in Y \right\} \subseteq A .$$

1.24 Definizione. *Sia $f : A \to B$ un'applicazione. Essa si dice iniettiva se per ogni $x', x'' \in A$ tali che $x' \neq x''$ accade che $f(x') \neq f(x'')$.*

Ciò si può esprimere anche dicendo che per ogni $y \in \operatorname{im} f$ esiste un unico elemento $x \in A$ tale che $y = f(x)$, oppure che vale la seguente implicazione:

$$f(x') = f(x'') \quad \Longrightarrow \quad x' = x'' .$$

1.25 Definizione. *Sia $f : A \to B$ un'applicazione. Essa si dice suriettiva se $\operatorname{im} f = B$, ovvero se per ogni $y \in B$ esiste almeno un elemento $x \in A$ tale che $y = f(x)$.*

1.26 Definizione. *Sia $f : A \to B$ un'applicazione. Essa si dice biettiva se è sia iniettiva che suriettiva.*

1.27 Esempio. *Sia A l'insieme degli abitanti di una certa città, ad esempio Napoli, in un certo istante. Definiamo un'applicazione $f : A \to \mathbb{N}_0$ al modo seguente. Se a è un abitante di Napoli, sia $f(a)$ la sua età. È chiaro che f è un'applicazione, in quanto ogni abitante ha sicuramente una età ben definita. f non è iniettiva, in quanto molti abitanti di Napoli sono coetanei, e non è suriettiva. Se scegliamo infatti un numero naturale m abbastanza grande, ad esempio $m = 1000$, certamente non potremo trovare un abitante di Napoli con quell'età, ovvero $\nexists\, a \in A$ tale che $f(a) = 1000$. Quindi $1000 \notin \operatorname{im} f$.*

1.28 Esempio. *Definiamo un'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo $x \mapsto x^2$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. f non è iniettiva (ad esempio abbiamo che $f(2) = f(-2) = 4$) e neppure suriettiva (ad esempio scelto -1 nel codominio $\mathbb{R}$, è ben noto che non esiste alcun elemento del dominio $\mathbb{R}$ che abbia -1 come quadrato). Osserviamo che*

$$f^{-1}(0) = \{0\} \quad ; \quad f^{-1}(1) = \{1, -1\} \quad ; \quad f^{-1}(-1) = \emptyset \; .$$

Possiamo ora definire due nuove applicazioni che agiscono come f, ma su insiemi diversi. Definiamo

$$g : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad h : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$

ponendo, come nel caso di f, $g(x) = x^2$ e $h(x) = x^2$, per ogni $x \in \mathbb{R}_0^+$. Si verifica agevolmente che g è un'applicazione iniettiva, ma non suriettiva, mentre h è sia iniettiva che suriettiva, e quindi è biettiva.

Questo esempio suggerisce la seguente

1.29 Definizione. *Sia $f : A \to B$ un'applicazione. Scelto un qualunque sottoinsieme non vuoto $\bar{A}$ del dominio A e un sottoinsieme $\bar{B}$ del codominio B tale che si abbia $f(\bar{A}) \subseteq \bar{B}$, l'applicazione $\bar{f} : \bar{A} \to \bar{B}$ definita ponendo $\bar{f}(x) = f(x)$, per ogni $x \in \bar{A}$, si dice restrizione di f. Talvolta la restrizione $\bar{f}$ si indica con il simbolo $f_{|\bar{A}}$, nel quale si evidenzia che il dominio è $\bar{A}$, ma non si evidenzia quale sia il codominio.*

Nell'esempio precedente, g ed h sono entrambe restrizioni di f, e in particolare $g = f_{|\mathbb{R}_0^+}$.

1.30 Esempio. *Sia A un qualunque insieme non vuoto. L'applicazione $id_A : A \to A$ definita ponendo $id_A(x) = x$ per ogni $x \in A$ si dice applicazione identica di A e si indica spesso con il simbolo id. Se $X \subseteq A$, la restrizione dell'identità al sottoinsieme X sul dominio si dice applicazione d'inclusione, o più semplicemente inclusione, di X in A, e si scrive talvolta $id_{|X} : X \hookrightarrow A$.*

Concludiamo questa breve esposizione sulle applicazioni introducendo i concetti di applicazione composta ed inversa.

1.31 Definizione. *Siano A, B, C degli insiemi non vuoti, e siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due applicazioni. Definiamo una nuova applicazione $h : A \to C$ ponendo, per ogni $x \in A$, $h(x) = g\big(f(x)\big)$. L'applicazione h si dice composta di f e g e si scrive $h = g \circ f$, o anche $h = gf$.*