



ROBERTO CAIMMI
GIOVANNI CARRARO

**LA GUIDOVIA
A CUSCINO D'ARIA**
VERIFICA EMPIRICA
DELLA SECONDA LEGGE DEL MOTO
E DEL PRINCIPIO DI EQUIVALENZA





aracne



ISBN
979-12-5994-333-0

PRIMA EDIZIONE
ROMA 11 OTTOBRE 2021

Indice

- 7 *Introduzione*
- 9 *Capitolo I*
Scopo dell'esperienza
- 11 *Capitolo II*
Principio di equivalenza
- 15 *Capitolo III*
Moto rettilineo uniformemente accelerato
- 17 *Capitolo IV*
Apparato sperimentale
- 19 *Capitolo V*
Soluzione del problema della misura: spazio percorso fissato
- 25 *Capitolo VI*
Soluzione del problema della misura: inclinazione fissata
- 29 *Capitolo VII*
Verifica grafica sul piano logaritmico
- 47 *Capitolo VIII*
Verifica della seconda legge del moto e del principio di equivalenza
- 59 *Conclusione*
- 61 *Ringraziamenti*
- 63 *Bibliografia*

6 Indice

65 *Appendice A. Usura degli strumenti: salvare il salvabile*

87 *Appendice B. Galleria fotografica*

Introduzione

L'utilizzo della guidovia a cuscino d'aria per la verifica empirica della seconda legge del moto e del principio di equivalenza, presso i laboratori delle Università e degli Istituti Tecnici Industriali e Professionali, è di così lunga data da rendere superfluo qualsiasi ulteriore cenno al riguardo. Viceversa, l'analisi degli errori sull'accelerazione, determinata per il tramite di un metodo di misura indiretto, e una discussione accurata sulle verifiche effettuate, hanno ricevuto scarsa considerazione a causa di una maggiore complessità del problema. Tali argomenti, tuttavia, ci sembrano inevitabili ai fini di una trattazione globale, e costituiscono lo scopo della presente ricerca.

Le motivazioni esposte impongono di ridurre al minimo indispensabile le considerazioni già ampiamente sfruttate per la verifica della seconda legge del moto e del principio di equivalenza, e al contrario di dare ampio risalto a tutto quanto, molto meno dibattuto, concerne l'applicabilità della formula di propagazione degli errori per la determinazione dello scarto di precisione¹ (o scarto quadratico medio) e la soluzione del problema della misura, relativamente all'accelerazione.

Gli argomenti dei prossimi paragrafi saranno, nell'ordine: scopo dell'esperienza; principio di equivalenza; moto rettilineo uniformemente accelerato; apparato sperimentale; soluzione del problema della misura per l'accelerazione: spazio percorso fissato; soluzione del problema della misura per l'accelerazione: inclinazione fissata; verifica grafica sul piano logaritmico; verifica della seconda legge del moto e del principio di equivalenza. Finalmente, la conclusione compendia i risultati di maggior rilievo. L'effetto comportato dall'usura della

1. Si preferisce denominare *errore di precisione* e *scarto di precisione* il parametro comunemente definito come *errore quadratico medio* e *scarto quadratico medio*, rispettivamente, a motivo di quanto segue. L'errore quadratico medio e quindi lo scarto quadratico medio, che ne costituisce la stima più attendibile, è inversamente proporzionale al *modulo di precisione* della distribuzione delle misure corrispondente al metodo utilizzato. In questa accezione, si può definire la *precisione* di un metodo di misura come l'inverso dell'errore di precisione della relativa distribuzione delle misure.

strumentazione è discusso in Appendice A, dove si descrive una maniera di correggere le conseguenze dovute alla presenza di un errore sistematico, dipendente soltanto dallo spazio percorso, sull'accelerazione. Una galleria fotografica che ritrae gli aspetti essenziali della strumentazione è presentata in Appendice B.

La ricerca corrente costituisce una versione migliorata di due precedenti pubblicazioni sull'argomento, citate nella bibliografia. Le modifiche apportate, oltre a fornire una soluzione originale al problema della misura per l'accelerazione ad inclinazione fissata e a precisare i limiti di applicabilità della formula di propagazione degli errori, chiarificano l'esposizione e perfezionano alcuni calcoli, oltre a correggere gli inevitabili errori di stampa.

Scopo dell'esperienza

L'esperienza è finalizzata alla verifica della seconda legge del moto e dell'equivalenza tra massa gravitazionale e massa inerziale (principio di equivalenza) utilizzando un carrello che scivola senza attrito su una rotaia rettilinea in pendenza, per angoli di inclinazione differenti e per masse differenti. Al riguardo, si procede attraverso i passaggi seguenti.

- a) Principio di equivalenza e seconda legge del moto.
- b) Moto rettilineo uniformemente accelerato.
- c) Soluzione del problema della misura per l'accelerazione, a percorso fissato.
- d) Soluzione del problema della misura per l'accelerazione, ad inclinazione fissata.
- e) Verifica grafica sul piano logaritmico.
- f) Verifica della seconda legge del moto.
- g) Verifica del principio di equivalenza.

I punti menzionati saranno trattati nei paragrafi successivi.

Principio di equivalenza

Nell'ambito della meccanica classica, la massa è una grandezza fisica suscettibile di una duplice interpretazione, dal punto di vista della legge di gravitazione universale oppure della seconda legge del moto. Un corpo dove la distribuzione di densità è a simmetria sferica, ossia le superfici di ugual densità sono sferiche e concentriche, esercita su un corpo esterno la stessa azione gravitazionale dovuta a un punto materiale di pari massa, coincidente con il centro di simmetria.

Con riferimento a due corpi soddisfacenti a questi requisiti, e all'ulteriore requisito che non si compenetrino, ossia la distanza fra i centri sia non inferiore alla somma dei rispettivi raggi, la legge di gravitazione universale si esprime nella maniera:

$$F_G = \frac{GM_G}{r^2} m_G ; \quad (2.1)$$

dove F_G rappresenta la forza gravitazionale (in modulo), G la costante di gravitazione universale, M_G la massa gravitazionale del corpo inteso quale sorgente del campo, m_G la massa gravitazionale del corpo considerato, r la distanza fra i centri.

Nel caso generale, la (2.1) costituisce un'approssimazione tanto migliore quanto maggiore è la distanza fra i corpi. Conformemente alla legge di gravitazione universale, espressa dalla (2.1), due corpi si attraggono con intensità direttamente proporzionale alle rispettive masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza fra i centri.

Si consideri un sistema di riferimento inerziale, ossia un sistema di riferimento dove sono valide le leggi del moto, in particolare il principio di inerzia¹. Un corpo libero, soggetto all'azione uniforme

1. Il principio di inerzia, o prima legge del moto, stabilisce che un corpo libero non soggetto a forze esterne preserva il proprio stato di moto uniforme, ossia a velocità costante.

di una forza esterna, ne risulta accelerato in conformità alla seconda legge del moto:

$$F_E = a m_I ; \quad (2.2)$$

dove F_E rappresenta la forza esterna (in modulo), a l'accelerazione (in modulo), m_I la massa inerziale. Conformemente alla seconda legge del moto, espressa dalla (2.2), un corpo libero acquisisce un'accelerazione prefissata sotto l'azione di una forza esterna, la cui intensità è direttamente proporzionale alla massa.

Le considerazioni esposte mostrano come una singola grandezza fisica, la massa, si possa trattare in due differenti accezioni facendo riferimento a due proprietà universali presenti nei corpi: la gravitazione e l'inerzia. I risultati trovati possono conglobarsi in un singolo enunciato.

Principio di equivalenza. *In ogni corpo dell'universo, la massa gravitazionale e la massa inerziale coincidono².*

La proporzionalità tra massa gravitazionale e massa inerziale si può dedurre dalle (2.1), (2.2), nel caso particolare in cui $F_G = F_I$, vale a dire per corpi in caduta libera (senza attrito) in un campo gravitazionale qualsiasi, in particolare quello terrestre. In tali condizioni, l'accelerazione è data dall'accelerazione di gravità ($a = g$), la distanza dal raggio della Terra ($r = R$), e pertanto risulta³:

$$\frac{GM_G}{R^2} m_G = g m_I ; \quad (2.3)$$

La totalità dei sistemi di riferimento inerziali è costituita da tutti e soli i sistemi di riferimento che traslano rigidamente e uniformemente rispetto a un sistema di riferimento inerziale arbitrario ma prefissato.

2. Passando dalla meccanica classica alla teoria della relatività generale, l'enunciato si formula nel modo seguente.

Principio di equivalenza.

I fenomeni fisici riscontrabili in un sistema di riferimento non inerziale sono localmente (vale a dire per regioni sufficientemente piccole del continuum spazio-temporale) in tutto e per tutto indistinguibili dai fenomeni fisici riscontrabili in un sistema di riferimento inerziale soggetto ad un opportuno campo gravitazionale, cosicché non sarebbe possibile, in linea di principio, riconoscere localmente se il laboratorio in cui si opera si trovi in un sistema di riferimento non inerziale o in un sistema di riferimento inerziale soggetto a un campo gravitazionale.

3. Nell'approssimazione fatta, la distribuzione di densità della Terra si suppone a simmetria sferica. A rigore di termini, si dovrebbe usare $R + \Delta R$ in luogo di R (raggio della superficie terrestre al livello del mare), ma $\Delta R/R \ll 1$ nelle condizioni considerate.

inoltre dal fatto che sono costanti sia l'accelerazione di gravità, g , in base alle osservazioni, sia il rapporto a primo membro, in quanto dipendente dalle caratteristiche intrinseche della Terra, segue che la relazione tra massa gravitazionale e massa inerziale non può che essere lineare: $m_G = km_I$, con k costante di proporzionalità. La verifica del principio di equivalenza consiste nel mostrare che si ha $k = 1$.

Moto rettilineo uniformemente accelerato

Da un punto di vista cinematico, il moto rettilineo uniformemente accelerato comporta una dipendenza dello spazio percorso dal tempo trascorso¹ di tipo parabolico:

$$s = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 ; \quad (3.1)$$

dove s denota lo spazio percorso, t il tempo trascorso, v la velocità, a l'accelerazione, e l'indice, 0 , lo stato iniziale². Ci si limita a considerare i soli moduli in quanto nelle condizioni considerate, con un'opportuna scelta del sistema di riferimento, l'equazione vettoriale del moto si riduce alla sua controparte scalare.

Senza perdita di generalità, lo spazio percorso iniziale e il tempo trascorso iniziale possono ritenersi nulli, $s_0 = 0$, $t_0 = 0$, mentre l'annullamento della velocità iniziale, $v_0 = 0$, costituisce una restrizione effettiva. In tali

1. Preferiamo riferirci ai termini "spazio percorso" e "tempo trascorso" anziché ai termini "spazio" e "tempo" per una duplice ragione: in primo luogo, intendiamo i concetti di spazio e di tempo alla stregua di aspetti o proprietà del cosmo e non dei suoi costituenti; in secondo luogo, ogni considerazione cinematica o dinamica ha senso soltanto se riferita ad un sistema di assi arbitrario ma prefissato, tale da esprimere ogni punto del *continuum* spazio-temporale per mezzo di quattro coordinate: tre spaziali, riconducibili allo spazio percorso, e una temporale, riconducibile al tempo trascorso.

2. Infatti dalla definizione di accelerazione istantanea si trae $dv = a dt$, e integrando si ottiene:

$$v - v_0 = a(t - t_0) ;$$

essendo a costante nelle condizioni considerate. Inoltre dalla definizione di velocità istantanea si trae $ds = v dt$, e integrando si ottiene:

$$s - s_0 = \int_{t_0}^t v dt = \int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)] dt = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 ;$$

che è l'equazione del moto rettilineo uniformemente accelerato.