aracne

ALESSIO DRIVET

OGGETTI MATEMATICI

UN DIVERSO APPROCCIO ALLA MATEMATICA

aracne

aracne

ISBN
979–12–5994–230–2

PRIMA EDIZIONE
ROMA 29 GIUGNO 2021

Indice

Prefazione

Questo libro è dedicato ad un aspetto particolare: la matematica esaminata dal punto di vista della didattica.

Tutto inizia per me, diversi anni fa, dalla considerazione di una certa inadeguatezza di un approccio tradizionale all'insegnamento della matematica. Molti insegnanti e una parte non piccola (forse maggioritaria?) degli studenti spesso si rendono conto che qualcosa non funziona e denunciano la mancanza di entusiasmo nel trattare la disciplina. A questo punto ci si deve porre la domanda chiave: perché?

Le spiegazioni sono molteplici. Da parte di molti docenti c'è l'idea che certe abitudini consolidate abbiano un serio fondamento pedagogico e quindi sia difficile metterle in discussione. A ciò si aggiunge, forse, anche una certa paura nell'immaginare e sperimentare vie nuove.

Dal punto di vista degli studenti è molto sviluppato sia il principio economico della minimizzazione dei costi, per cui è meglio camminare su un sentiero sicuro piuttosto che addentrarsi in terreni pericolosamente inesplorati, sia sono presenti remore che si fondano su elementi di tipo psicologico.

In questa sede esamino la possibilità di impiegare delle rappresentazioni iconiche per introdurre o spiegare in maniera concreta parti della matematica. Si tratta di *artefatti* molto vari, alcuni con evidenti connotazioni disciplinari, altri che costituiscono uno spunto per approfondire temi matematici più o meno usuali. Artefatto è un oggetto materiale o simbolico di per sé, strumento è una entità che tiene conto sia delle caratteristiche dell'oggetto sia degli schemi d'uso.

La relazione tra la conoscenza matematica e l'utilizzo di uno strumento ha una lunga storia, ma soprattutto ha avuto un particolare rilievo nelle riflessioni sulla didattica. Prendiamo in considerazione due oggetti: il primo è il compasso, il secondo è un bicchiere.[1] Entrambi gli strumenti possono essere utilizzati per produrre una traccia circolare e quindi entrambi possono essere associati alla nozione matematica di cerchio. A parità di prodotto finale possiamo osservare che la procedura seguita è completamente differente ed rimanda a proprietà geometriche piuttosto diverse. Nel caso del compasso il fuoco è sul concetto di centro e di distanza da questo (raggio); nel caso del bicchiere (e della matita o penna che servono per la traccia) lo schema di utilizzo si concentra sulla proprietà geometrica di curvatura. Possiamo quindi distinguere tra l'artefatto e la procedura che viene utilizzata per svolgere il compito.[2]

La parola artefatto in matematica evoca strumenti usati nella storia come il compasso, l'àbaco, i calcolatori meccanici, fino ad arrivare agli strumenti informatici.

In questo testo l'approccio e le finalità sono diverse, gli artefatti sono considerati come suggestioni, punti di partenza per l'introduzione di concetti matematici, un modo per riconnettere gli studenti con il mondo reale, lo spunto per attività di tipo laboratoriale[3]. Purtroppo l'uso eccessivo di esempi e formulazioni astratte con riferimento esclusivo al linguaggio algebrico allontana lo studente dal piacere della disciplina. Invece la matematica esige attenzione e concentrazione, ma la comprensione del suo senso fa nascere interesse, piacere di scoprire e favorisce l'apprendimento profondo. Cercare di identificare, nella vita quotidiana, oggetti e situazioni che ci parlano di una matematica diversa, realmente incarnata (*embodied*), può essere una buona cura di quell'analfabetismo matematico che sembra affliggere buona parte della società.

[1] Mariotti, M. A., Maffia, A. (2018). Dall'utilizzo degli artefatti ai significati matematici: il ruolo dell'insegnante nel processo di mediazione semiotica. Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula, (4), 50–64.

[2] Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies – Approche cognitive des instruments contemporains. Colin.

[3] Castelnuovo, E. (2017). Pentole, ombre, formiche. Utet.

Per questo motivo preferirei utilizzare, al posto di artefatti, il termine *oggetti matematici*.

Il lettore attento sicuramente ritroverà molti esempi noti, alcuni semmai presentati in modo diverso dal consueto. Talvolta l'originalità consiste nel raccogliere stimoli e proposte e disporle in un quadro organico, così come decine di perle possono comporre una collana.

Quello che manca spesso nella relazione docente — discente è la capacità del primo di insegnare il "saper vedere" in matematica. L'importanza di questa prospettiva è ben rappresentata da un racconto, una sorta di fiaba, che potremmo intitolare "la mano della principessa". Ecco la semplice trama:

> Un Re ha una bellissima figlia, una principessa la cui mano è contesa da un gran numero di pretendenti, ma la fanciulla rifiuta ogni approccio e rimane muta e triste. Il Re invita tutti a corte e promette di dare la figlia in sposa a chi riuscirà a farla sorridere. I pretendenti si esibiscono in tentativi di seduzione: chi canta, chi compie equilibrismi, che fa magie, chi crea una pioggia di luci, chi effettua voli maestosi … Niente. Il volto della principessa non lascia trapelare alcuna emozione. Il Re, disperato, non sa più cosa fare finché l'ultimo dei pretendenti estrae dal suo mantello un paio di occhiali e li porge alla principessa che li indossa. Finalmente sorride!

Chi non ha gli strumenti giusti per vedere non riesce ad apprezzare gli argomenti proposti. Compito del docente è quello di fornire gli occhiali.

Il testo non si presenta come un manuale, ce ne sono di eccellenti, ma come un sentiero in un parco in cui ogni oggetto rappresenta una panchina su cui sostare per riflettere su termini, concetti, curiosità matematiche. Gli oggetti presentati sono 120, una parte limitata ma significativa degli oggetti che si possono trovare nel sito: https://sites.google.com/site/oggettimatematici/home.

Il lettore troverà una suddivisione in quattro parti, seguendo la ripartizione in macroaree ormai comunemente accettata e utilizzata per esempio dall'INVALSI: *Numeri*, *Relazioni e Funzioni*, *Spazio e Figure*, *Dati e Previsioni*.

In realtà i quattro titoli esprimono solo una macro area di lavoro, i quattro capitoli saranno più articolati.

La prima area tratta di Numeri, Strumenti di calcolo, Algoritmi, Logica.

La seconda di Relazioni, Funzioni, Equazioni, Derivate e Integrali.

La terza si articola in Geometria piana, Geometria solida, Simmetria, Topologia.

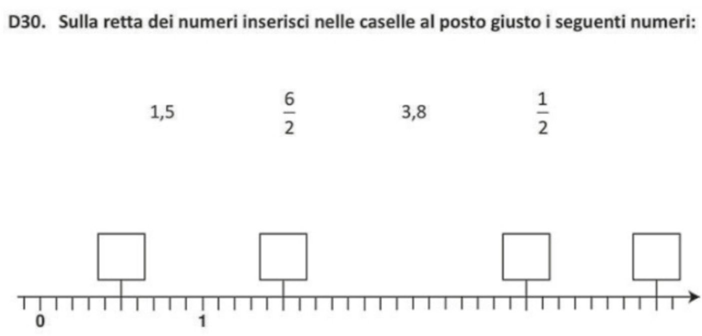
La quarta è suddivisa in Probabilità, Distribuzioni di probabilità, Combinatoria, Statistica.

Introduzione

La divisione dei contenuti in grossi blocchi è ormai condivisa a livello internazionale, sulla base delle indicazioni italiane presenti nel Quadro teorico di riferimento dell'INVALSI (Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione).

OCSE─PISA considera la *literacy matematica* come: «la capacità di un individuo di ragionare matematicamente e di formulare, utilizzare e interpretare la matematica in una varietà di contesti del mondo reale». Se si considera corretto questo approccio allora non è irrilevante presentare concretamente qualcosa che fa parte del mondo reale.

Come semplice esempio vediamo il quesito proposto nel 2016 ad una quinta elementare:



Lo si confronti con quello suggerito, nel testo, a proposito dell'Occhio di Horus.

In tutto sono presentati 120 oggetti, 30 per ciascun capitolo, così suddivisi:

Capitolo I

Numeri

1. Copri scarico
2. Matrioska
3. Chiudi la scatola
4. Rullo matematico
5. Calendario
6. Shanghai
7. Affetta torta
8. Occhio di Horus
9. Mole Antonelliana
10. Orologio matematico

Strumenti di calcolo

11. Mano
12. Abaco
13. Quipu
14. Bastoncini di Nepero
15. Educational Monkey
16. Regolo
17. Regolo aeronautico

Algoritmi

18. Bilancia
19. Gocce d’amore
20. Esapedone
21. Fiammiferi
22. Torre di Hanoi
23. Mancala
24. Mastermind
25. Morra cinese
26. Rane e Lucertole
27. Solitario dell’orologio

Logica

28. Scheda perforata
29. Euforbia
30. Boccia con neve

Capitolo II

Relazioni

1. Magnete mitologico
2. Big Mac
3. Biscotto
4. Candela
5. GPS
6. Contapassi
7. Coltivazione
8. Cartolina
9. Macchina fotografica

Funzioni

10. Bicchieri
11. Achille e la Tartaruga
12. Orario grafico ferroviario
13. Pulsiossimetro
14. Tio Papel
15. Carte da gioco
16. Scimmia
17. Spilletta

Equazioni

18. Asciugaverdura
19. Imbuto
20. Calcetto
21. Scarpa da donna
22. Stampino cuore

Capitolo III

15. Calcio con le dita

Distribuzioni di probabilità

16. Flipper
17. Spazzolino da denti
18. Scacchiera

Combinatoria

19. Smartphone
20. Paesaggi
21. Lucchetto
22. Paletta
23. Operai
24. Biancaneve
25. Quindici

Statistica

26. Book
27. Napoleone
28. Grillo
29. Cioccolato
30. Bottoni

Capitolo I

Numeri

Se volessimo individuare i mattoni che stanno alla base della costruzione matematica sicuramente dovremmo rivolgerci ai numeri. Si tratta di enti astratti che, fatti corrispondere ciascuno a ciascun oggetto preso in considerazione, servono a indicare la quantità degli oggetti costituenti un insieme. Storicamente l'esigenza più antica è stata quella di contare oggetti. Insiemi di tacche incise su ossa durante l'era glaciale sono ad oggi le più antiche rappresentazioni di numerosità. Un grande passo in avanti fu la creazione di simboli in grado di rappresentare un insieme più numeroso, ad esempio ∩ (Egizi), Ι (Greci), X (Romani), o = (Maya) per dieci. Il passo fondamentale si ha con la diffusione dei numeri indo arabi, con il criterio posizionale e l'utilizzazione dello zero.

I *numeri naturali* sono sicuramente alla base dell'impianto matematico e, in modo più evidente, gli interi positivi e negativi. Come diceva, con una certa forzatura, Leopold Kronecker (1823–1891) «Dio fece i numeri interi; tutto il resto è opera dell'uomo».

L'operazione di distinguere tra uno, due e molti risale all'uomo primitivo, ma la comprensione che, ad esempio, una pecora e un sasso hanno in comune il fatto di essere "uno", cioè la nozione astratta di numero, fu un processo graduale che viene fatto risalire circa al 30.000 a.C.

Col tempo furono introdotti diversi simboli e parole per indicare i numeri naturali e in diversi casi anche alcuni tipi di frazioni. Esistono simboli risalenti agli antichi egizi che indicano frazioni unitarie, cioè con numeratore uguale a uno. Se ne possono trovare ad esempio nel papiro di Rhind risalente circa al 2000 a.C. Tuttavia il numero zero dovette aspettare più tempo per venire considerato un numero al pari degli altri.

Il superamento dei numeri naturali in favore dei numeri razionali positivi è attribuito ai pitagorici che sembra furono i primi a considerare la frazione non più come entità unica ma come rapporto tra numeri naturali.

È noto il fatto che l'impossibilità di rappresentare la diagonale di un quadrato unitario in termini di razionali mise in crisi l'impianto pitagorico, ma aprì la porta ai numeri irrazionali.

Per rappresentare qualsiasi grandezza, sia essa l'altezza degli individui, la velocità con cui si muove un oggetto, la dimensione di un atomo, e così via, occorre però rivolgersi ai numeri reali. Essi sono identificati dalla loro numerazione decimale.

Nel XVI secolo nelle formule di risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado appaiono infine i numeri immaginari che partono dalla definizione di unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$.

Molti ricercatori hanno cercato di capire quali meccanismi della mente umana permettono di formulare ragionamenti matematici, una ipotesi tra le più interessanti è quella della conoscenza incorporata o *embodied cognition*.[1]

La cognizione è incarnata quando è dipendente dalle caratteristiche del corpo di un soggetto. Essa fornisce un punto di partenza per far progredire la nostra comprensione di come gli approcci percettivi facilitano e incoraggiano l'apprendimento.

La ricerca recente ha mostrato che i bambini piccolissimi hanno abilità numeriche. L'aspetto interessante è che il senso del numero è una capacità che è antecedente all'atto di contare e non è una proprietà specifica dell'essere umano. Numerosi esperimenti hanno fatto luce sui meccanismi neuronali e definito con il termine *subitizzazione* (subitizing in inglese) la capacità di distinguere in modo immediato e corretto la quantità di un numero di oggetti o elementi. il termine si deve a E.L. Kaufman[2].

[1] Lakoff, G., Nunez, R. (2005). Da dove viene la matematica, Come la mente embodied dà origine alla matematica. Bollati Boringhieri

[2] Kaufman, E., Lord, M., Reese, T., & Volkmann, J. (1949). The Discrimination of Visual Number. The American Journal of Psychology, 62(4). p. 498–525.

1.1. Numeri

Per introdurre il tema possiamo ricorrere ad un primo oggetto che può rappresentare il processo noto come *subitizzazione*: il **Copri scarico**.

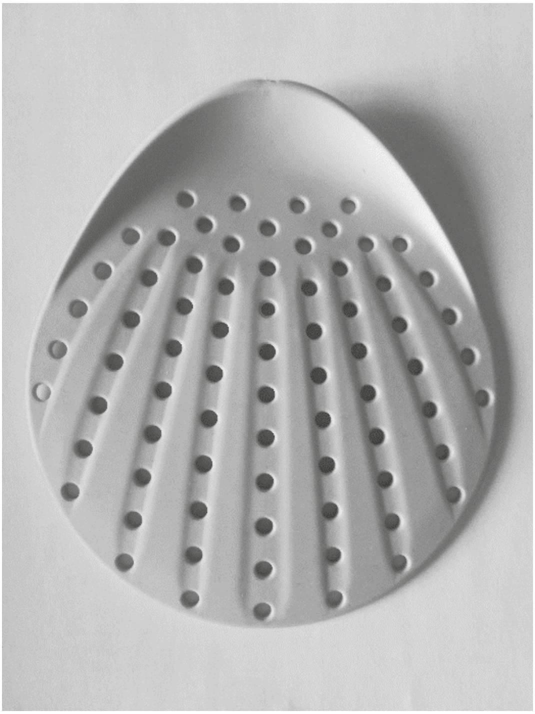


Figura 1.1. Copri scarico.

Il copri scarico è un oggetto, di plastica o metallo, che viene posizionato sopra lo scarico del lavandino in modo da impedire che si intasi per la caduta accidentale di un corpo estraneo.

Il copri scarico in Figura mostra una serie di fori, ma quanti? L'unico modo è quello di contarli in quanto il nostro cervello non è in grado di fornirci una risposta automatica.

Fino a quattro / cinque elementi la discriminazione è rapida, accurata e precisa. L'aumento del numero degli oggetti richiede, in genere, 250–350 millisecondi aggiuntivi per ogni elemento aggiunto. Al di sopra di 4 iniziano fenomeni di distorsione o approssimazione del senso della numerosità[6].

Questa differenza nei tempi di reazione è chiaramente visibile nel grafico che rappresenta come i tempi di risposta medi in base al numero di oggetti.

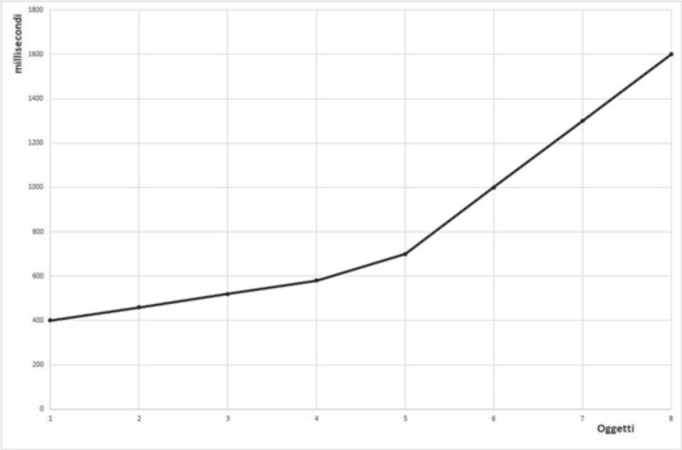


Figura 1.2. Grafico Subitizzazione.

Forse a questo si riferiva la storia del corvo che sapeva "contare" fino a cinque, citata da tutti gli studiosi delle abilità matematiche degli animali. La storia può essere così sintetizzata: *1* contadino voleva uccidere un corvo che aveva fatto il suo nido in cima ad una torre perché gli danneggiava il raccolto. Il contadino pensò di chiedere aiuto ad un suo vicino. I *2* uomini entrarono insieme nella torre, e poco dopo ne uscì uno. Il corvo non si fece ingannare, e non ritornò al nido finché non fu uscito anche il secondo contadino. Per riuscire ad ingannarlo entrarono poi *3* uomini e successivamente *4* e *5*. Ma il corvo ogni volta aspettava che fossero usciti tutti prima di far ritorno al nido. Solo con *6* i contadini ebbero la meglio, infatti il corvo aspettò che cinque di

[6] Dehaene, S., Ottolenghi, M. L. V. (2000). Il pallino della matematica: scoprire il genio dei numeri che è in noi. A. Mondadori.