

ECONOMICAMENTE

PENSIERO, RISORSE, NUMERI

ECONOMICAMENTE

PENSIERO, RISORSE, NUMERI



L'economia è uno studio del genere umano
negli affari ordinari della vita.

ALFRED MARSHALL, *Principi di Economia*, 1890

Dalle teorie atte a spiegare e immaginare sistemi economici, all'applicazione, alla gestione e all'organizzazione delle risorse, per arrivare, infine, all'analisi, alla misura e al calcolo dei modelli possibili. Tutto questo è economia, scienza dalle molteplici sfaccettature, che di frequente solleva e studia problematiche che ai non esperti del settore possono apparire ostiche.

Questa collana ospita testi di taglio saggistico che contestano tale ostilità e mirano a rendere fruibili argomenti potenzialmente spinosi per un lettore privo di occhio scientifico.

Classificazione Decimale Dewey

— 330.1543 (23.) SCUOLE DI PENSIERO ECONOMICO. SCUOLA MATEMATICA

Thema

— Soggetto: KC. Economia

— Qualificatore: 4CTB. Per l'istruzione universitaria ed equivalenti

ITALO MARIA SCROCCHIA

MATEMATICA DELL'ECONOMIA DINAMICA

FONDAMENTI ANALITICI PER LO STUDIO
DEGLI *ELEMENTS OF DYNAMIC OPTIMIZATION*
DI A.C. CHIANG

Prefazione di

MARIANTONIETTA FIORE





ISBN
979-12-218-2883-2

PRIMA EDIZIONE
ROMA 30 OTTOBRE 2026

INDICE

XI	<i>Premessa</i>
XIII	<i>Prefazione</i>
XV	<i>Prefazione</i> di MARIANTONIETTA FIORE

PARTE I

L'AMBIENTE:

SPAZI DI FUNZIONI

3	CAPITOLO I Spazi di funzioni
	1.1. Dal punto alla traiettoria: perché serve un nuovo ambiente, 3 – 1.2. Funzioni come vettori, 4 – 1.3. Norme e distanze fra funzioni, 7 – 1.4. Intorni deboli e forti; estremi deboli e forti, 10 – 1.5. Convergenza e completezza, 11 – 1.6. La classe ammissibile e lo spazio delle variazioni, 12 – 1.7. Esercizi, 14.

PARTE II

L'OGGETTO:

IL FUNZIONALE

21	CAPITOLO II Funzionali
	2.1. Che cos'è un funzionale: dalla somma all'integrale, 21 – 2.2. Tre problemi economici come funzionali, 24 – 2.3. Funzionali lineari, 26 – 2.4. Continuità di un funzionale, 26 – 2.5. Il problema variazionale fondamentale, 28 – 2.6. Esercizi, 29.

PARTE III

IL CALCOLO:

VARIAZIONE, EQUAZIONE DI EULERO, CONCAVITÀ

35 CAPITOLO III

La variazione e l'equazione di Eulero

3.1. Perturbazioni e riduzione al calcolo in una variabile, 35 – 3.2. Derivare sotto il segno di integrale: la regola di Leibniz, 37 – 3.3. La prima variazione e il differenziale di Gâteaux, 39 – 3.4. Il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, 40 – 3.5. L'equazione di Eulero, 41 – 3.5.1. *Forme equivalenti e casi speciali*, 43 – 3.6. La seconda variazione e la condizione di Legendre, 46 – 3.7. Esercizi, 47.

51 CAPITOLO IV

Concavità e condizioni sufficienti

4.1. Funzioni concave su $\mathbb{R}^n$: richiami sistematici, 51 – 4.2. Funzionali concavi, 55 – 4.3. Il teorema di sufficienza, 56 – 4.4. Esercizi, 59.

PARTE IV

LA DINAMICA:

EQUAZIONI DIFFERENZIALI E ORIZZONTE INFINITO

65 CAPITOLO V

Equazioni differenziali e diagrammi di fase

5.1. Equazioni differenziali come leggi del moto, 65 – 5.2. Equazioni lineari risolubili in forma chiusa, 66 – 5.2.1. *Primo ordine*, 67 – 5.2.2. *Secondo ordine a coefficienti costanti*, 68 – 5.3. Sistemi planari lineari e classificazione degli equilibri, 69 – 5.4. Linearizzazione e diagrammi di fase, 72 – 5.4.1. *La costruzione del diagramma di fase*, 72 – 5.5. Esercizi, 75.

79 CAPITOLO VI

Orizzonte infinito e condizioni di trasversalità

6.1. Integrali impropri: definizione e criteri, 79 – 6.2. Quando converge l'utilità scontata, 80 – 6.3. Il problema variazionale su orizzonte infinito, 81 – 6.3.1. *La trasversalità come limite*, 81 – 6.4. Valore attuale e valore corrente, 83 – 6.5. Esercizi, 85.

PARTE V

IL CONTROLLO:

PRINCIPIO DEL MASSIMO

89 CAPITOLO VII

Controllo ottimo e principio del massimo

7.1. Il problema di controllo ottimo, 90 – 7.2. Dal calcolo delle variazioni al controllo: la funzione ausiliaria, 90 – 7.3. Il principio del massimo di Pontryagin, 91 – 7.4. Il calcolo delle variazioni come caso particolare, 92 – 7.5. L'equazione del co-stato come legge di arbitraggio, 93 – 7.6. Valore corrente e problemi scontati, 94 – 7.7. Un esempio completo: il Ramsey col principio del massimo, 95 – 7.8. Vincoli sul controllo e soluzioni bang-bang, 96 – 7.9. Una condizione sufficiente: il teorema di Mangasarian, 96 – 7.10. Esercizi, 97.

99 CAPITOLO VIII

Sistemi a più variabili: stati e controlli vettoriali

8.1. Il problema di controllo vettoriale, 99 – 8.2. Il principio del massimo vettoriale, 100 – 8.3. Analisi di fase in dimensione superiore, 101 – 8.3.1. *Autovalori di una matrice di ordine $2n$* , 101 – 8.3.2. Il conteggio della dimensione del sentiero stabile, 102 – 8.4. Un esempio a due stati svolto fino agli autovalori, 103 – 8.5. Esercizi, 104.

107 CAPITOLO IX

Vincoli di disuguaglianza

9.1. Richiamo: i vincoli in statica e le condizioni di Kuhn-Tucker, 107 – 9.2. Vincoli sul controllo, 108 – 9.3. Vincoli sullo stato, 109 – 9.4. Esercizi, 111.

PARTE VI

IL TEMPO DISCRETO

115 CAPITOLO X

Il tempo discreto: equazioni alle differenze

10.1. Equazioni alle differenze del primo ordine, 116 – 10.2. Equazioni alle differenze del secondo ordine, 117 – 10.3. Ottimizzazione dinamica in tempo discreto, 118 – 10.4. Esercizi, 120.

123 **CAPITOLO XI**

Programmazione dinamica: l'equazione di Bellman

11.1. La funzione valore e il principio di ottimalità, 123 – 11.2. L'equazione di Bellman, 124 – 11.3. Dall'equazione di Bellman all'equazione di Eulero, 125 – 11.4. Risolvere l'equazione di Bellman: l'iterazione sul valore, 127 – 11.5. Esercizi, 128.

PARTE VII

L'INCERTEZZA:

OTTIMIZZAZIONE STOCASTICA

133 **CAPITOLO XII**

Fondamenti di probabilità

12.1. Spazio campionario, eventi, probabilità, 133 – 12.2. Variabili aleatorie, 135 – 12.3. Valore atteso e varianza, 136 – 12.4. Attesa condizionata, 137 – 12.5. Processi stocastici e catene di Markov, 138 – 12.6. Esercizi, 139.

141 **CAPITOLO XIII**

Ottimizzazione dinamica stocastica

13.1. Il problema stocastico e l'equazione di Bellman, 141 – 13.2. L'equazione di Eulero stocastica, 143 – 13.3. Un esempio: consumo sotto incertezza di reddito, 143 – 13.4. Cenni al tempo continuo: l'equazione di Hamilton–Jacobi–Bellman, 144 – 13.5. Esercizi, 145.

147 *Appendici*

A. Tavola di raccordo con il Chiang, 149 – B. Prontuario, 151 – C. Algebra lineare per la dinamica, 161.

165 *Bibliografia*

169 *Indice analitico*

PREMESSA

Il presente lavoro è basato in larga parte sulla rielaborazione dei testi del Prof. Alpha C. Chiang sull'economia dinamica e i metodi matematici per l'economia, e in particolare di:

- A. C. Chiang, *Elements of Dynamic Optimization*, McGraw–Hill, New York, 1992;
- A. C. Chiang, *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, McGraw–Hill, New York (varie edizioni).

Esso è destinato agli studenti delle facoltà di Economia che abbiano sostenuto proficuamente un corso di matematica generale, ed è stato elaborato con l'unica preoccupazione di rendere una materia di per sé carica di contenuti matematici più fruibile a chi possiede basi matematiche non complete — almeno al livello di un biennio di Ingegneria — nei settori dell'analisi reale e complessa e dell'analisi funzionale.

Per questo motivo le nozioni più avanzate (completezza degli spazi funzionali, teoremi di esistenza, regolarità delle estremali) vengono richiamate nei loro enunciati e nel loro significato, ma non sempre dimostrate per esteso, con rinvio ai testi specialistici; mentre si è dato ampio spazio alle motivazioni intuitive, ai passaggi intermedi e alle interpretazioni economiche, nella convinzione che la comprensione preceda, e renda possibile, il rigore. I riferimenti puntuali ai testi di Chiang — capitoli, paragrafi e numeri di formula — sono forniti nelle note e nei riquadri «Nel Chiang», per consentire al lettore il confronto diretto con la trattazione originale.

PREFAZIONE

Il presente lavoro raccoglie e ordina le esperienze di studio maturate dall'autore durante il dottorato di ricerca, nel corso dell'approfondimento del manuale di Alpha C. Chiang, *Elements of Dynamic Optimization* (McGraw-Hill, New York, 1992). Quanto qui esposto è il frutto di quel percorso: gli appunti, le rielaborazioni e i chiarimenti che si sono resi necessari per rendere pienamente intelligibile un testo di grande ricchezza ma di non immediata accessibilità per chi proviene da una formazione economica.

Questa monografia nasce da un'esigenza precisa: fornire al lettore economista gli strumenti matematici necessari per affrontare gli *Elements of Dynamic Optimization* di Alpha C. Chiang non come un elenco di prerequisiti da ripassare, ma come un *corpo organico di idee*. La differenza non è di stile, ma di sostanza. Un elenco di prerequisiti risponde alla domanda «che cosa devo sapere?»; un'esposizione organica risponde alla domanda «*perché* l'ottimizzazione dinamica ha la forma che ha?».

La risposta a questa seconda domanda ruota attorno a un unico oggetto centrale: il **funzionale**, cioè una funzione il cui argomento non è un numero né un vettore di $\mathbb{R}^n$, ma un'intera *traiettoria* — un sentiero temporale di prezzi, di capitale, di consumo. Tutta l'ottimizzazione dinamica, dal calcolo delle variazioni alla teoria del controllo ottimo, è lo studio degli estremi di funzionali. Di conseguenza l'architettura del testo è la seguente.

- **Parte I — L'ambiente.** Prima di studiare le funzioni di traiettorie occorre capire *dove vivono* le traiettorie: gli spazi di funzioni $C[a, b]$ e $C^1[a, b]$, le loro norme, la nozione di vicinanza fra curve. È qui che emerge, con statuto matematico preciso, la distinzione fra estremi *deboli* ed estremi *forti*, che nel Chiang resta implicita.
- **Parte II — L'oggetto.** Il funzionale: definizione rigorosa, esempi geometrici ed economici (il monopolista di Evans, l'aggiustamento del capitale di Eisner-Strotz, l'accumulazione ottima alla Ramsey), continuità di funzionali e formulazione del problema variazionale fondamentale.
- **Parte III — Il calcolo.** La *variazione* δ come differenziale di Gâteaux; la regola di Leibniz come strumento di derivazione dei funzionali integrali; il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni (con dimostrazione completa); l'equazione di Eulero letta come annullamento del gradiente in uno spazio di dimensione infinita; concavità e condizioni di sufficienza.

- **Parte IV — La dinamica.** Le equazioni differenziali come leggi del moto e l'analisi qualitativa (diagrammi di fase, linearizzazione, punti di sella); l'orizzonte infinito, con le questioni di convergenza degli integrali impropri e l'origine analitica delle condizioni di trasversalità.
- **Parte V — Il controllo.** Il principio del massimo di Pontryagin: stato e controllo, Hamiltoniana e co-stato, l'equazione del co-stato come legge di non-arbitraggio, il valore corrente nei problemi scontati, le soluzioni *bang-bang* e la sufficienza di Mangasarian. L'estensione ai sistemi a *più variabili* (stati e controlli vettoriali) con il conteggio della dimensione del sentiero a sella, centrale nella macrodinamica moderna, e il trattamento dei *vincoli di disuguaglianza* (Kuhn–Tucker dinamico, vincoli su controllo e stato, soluzioni a fasi). È il completamento naturale del calcolo delle variazioni — che ne risulta un caso particolare — e il ponte verso la seconda metà del Chiang.
- **Parte VI — Il tempo discreto.** Le equazioni alle differenze e l'ottimizzazione dinamica periodo per periodo, con l'equazione di Eulero discreta e il modello della ragnatela. La *programmazione dinamica* di Bellman: la funzione valore, il principio di ottimalità, l'equazione di Bellman e la sua soluzione per iterazione, con il legame fra funzione valore e prezzo-ombra. È il linguaggio della macroeconomia computazionale moderna e la porta naturale verso i modelli con incertezza.
- **Parte VII — L'incertezza.** I fondamenti della probabilità (spazio campionario, variabili aleatorie, valore atteso, attesa condizionata, processi di Markov), con approfondimenti sulla teoria della misura; e l'ottimizzazione dinamica *stocastica*: l'equazione di Bellman con il valore atteso, l'equazione di Eulero stocastica, il risparmio precauzionale e un cenno all'equazione di Hamilton–Jacobi–Bellman. È il completamento moderno del Chiang, e la porta della macroeconomia e della finanza quantitative.

Ogni capitolo è organizzato secondo la scansione classica *Definizione–Teorema–Dimostrazione–Osservazione*, nella tradizione espositiva della scuola matematica italiana. Le dimostrazioni sono svolte per esteso quando sono formative (lemma fondamentale, teorema di sufficienza, regola di Leibniz nel caso base) e sostituite da enunciati accurati con rinvii quando richiederebbero strumenti estranei allo scopo del testo (Picard–Lindelöf, Hartman–Grobman). I box color sabbia contengono l'*interpretazione economica* dei risultati; i box grigi, in chiusura di sezione o capitolo, indicano *dove* il materiale riappare nel Chiang. Gli esercizi sono graduati su tre livelli (immediato, intermedio, impegnativo) e ciascuno è seguito dalla propria soluzione.

Una avvertenza sull'uso. Questo testo *non* sostituisce il Chiang: lo precede e lo accompagna. Il lettore che lo abbia assimilato troverà nei capitoli 1–10 del Chiang non formule da accettare, ma conseguenze naturali di una struttura già compresa.

PREFAZIONE

Vi sono libri che nascono per rispondere a una domanda d'esame, e libri che nascono per rispondere a una domanda del nostro tempo. Il volume che il lettore ha fra le mani appartiene alla seconda categoria. Matematica dell'economia dinamica, di Italo Maria Scrocchia, si presenta come un'introduzione rigorosa agli strumenti dell'ottimizzazione dinamica — dal calcolo delle variazioni al principio del massimo, dalla programmazione dinamica di Bellman all'ottimizzazione stocastica — nello spirito dei classici *Elements of Dynamic Optimization* di Alpha C. Chiang. Ma sarebbe riduttivo leggerlo soltanto come un manuale di matematica per economisti: esso è, nel senso più pieno, un libro sulla sostenibilità.

La convinzione che attraversa queste pagine, e che condivido senza riserve, è che l'ottimizzazione dinamica sia il linguaggio matematico dello sviluppo sostenibile. Il modello di Ramsey, che apre e accompagna la trattazione, pone la domanda che ogni società responsabile deve porsi: quanto consumare oggi e quanto accumulare per domani. È il problema dell'equità intergenerazionale tradotto in un funzionale da massimizzare. La teoria del controllo ottimo fornisce il quadro entro cui pensare la gestione di risorse rinnovabili ed esauribili — foreste, pesca, energia, capitale naturale — mentre la condizione di trasversalità, spesso liquidata come tecnicismo, rivela qui il suo significato più profondo: essa è il vincolo formale sul lascito che consegniamo alle generazioni future, ciò che deve restare quando l'orizzonte della nostra scelta si chiude. Chi cerca il fondamento analitico delle agende europee sulla sostenibilità lo troverà, in ultima istanza, in queste equazioni.

Proprio per questo il volume si colloca con naturalezza accanto alle iniziative che l'Unione Europea promuove per avvicinare i giovani alla matematica della sostenibilità, fra cui il progetto Erasmus+ Math4Sustainability, che attraverso enigmi matematici e dilemmi socio-scientifici introduce nelle scuole il nesso fra pensiero quantitativo e pratiche sostenibili. Se quel progetto semina la curiosità, un'opera come questa ne rappresenta

l'approdo accademico: la continuità verticale che conduce dallo stupore del puzzle alla padronanza del modello, e che dà ai percorsi STEM “verdi” uno sbocco universitario di livello avanzato.

Il libro colma inoltre un vuoto reale nella manualistica in lingua italiana, dove mancava una trattazione organica che tenesse insieme il rigore matematico — definizione, teorema, dimostrazione — e l'interpretazione economica di ogni passaggio: prezzi–ombra, arbitraggio, aspettative, rischio. La scelta didattica dell'autore, per cui la comprensione precede il formalismo senza mai sostituirlo, gli esercizi graduati con soluzioni complete e l'apparato originale di figure e diagrammi di fase ne fanno uno strumento prezioso per gli studenti magistrali e i dottorandi di area economica, statistica e di ingegneria gestionale, e un riferimento per i docenti che cercano un ponte affidabile fra la matematica e l'economia dinamica.

L'autore, del resto, è la persona giusta per costruire questo ponte: la formazione in economia, statistica e ingegneria gestionale e il dottorato di ricerca in Economia e tecnologie per lo sviluppo sostenibile fanno di questo volume non un esercizio occasionale, ma la naturale prosecuzione di un percorso scientifico coerente.

Per tutte queste ragioni ritengo che il sostegno alla pubblicazione di quest'opera sia un investimento pienamente giustificato: per le sue ricadute didattiche immediate, per il contributo che offre alla terza missione dell'Ateneo, per la coerenza con gli obiettivi europei in materia di istruzione di qualità e di azione per il clima. Finanziare libri così significa fare ciò che l'ottimizzazione dinamica insegna: rinunciare a poco oggi per consegnare molto a chi verrà dopo di noi.

Sono dunque lieta di accompagnare il volume con questa prefazione, certa che saprà trovare i lettori — e le istituzioni — che merita.

Foggia, Luglio 2026

MARIANTONIETTA FIORE
*Professoressa Ordinaria di Economia Agraria,
Alimentare e Estimo rurale (AGRI-01/A)
Università degli Studi di Foggia*

