



Classificazione Decimale Dewey:

510.71 (23.) MATEMATICA. Educazione

Soggetto Thema:

PBC. Fondamenti della matematica

Qualificatori Thema:

4CN. Per l'istruzione secondaria

CARLO MATURO
TERESA MATURO

FARE MATEMATICA

VOLUME III





©

ISBN
979-12-218-2587-9

PRIMA EDIZIONE
ROMA 12 MARZO 2026

Presentazione

All'inizio del presente volume, vengono analizzate le proprietà d'insieme delle funzioni reali e in particolare quelle delle funzioni elementari.

Lo studio del Calcolo inizia con la derivata di una funzione, per passare poi all'algebra delle derivate e alla derivata logaritmica. Vengono enunciati e dimostrati i teoremi sulle funzioni derivabili in un intervallo.

Le applicazioni della derivata prima riguardano le regole di L'Hôpital, le altre forme di indeterminazione e gli asintoti. Si analizza come lo studio della derivata seconda di una funzione possa aiutare a determinarne i punti di massimo e/o di minimo.

La nozione di epigrafo consente di parlare di convessità (concavità) di una funzione in un intervallo; questa proprietà viene studiata con l'ausilio della derivata seconda della funzione.

L'esistenza delle derivate successive di una funzione f in un intorno I di un punto x_0 implica quella di un polinomio "prossimo" alla f in I ; analizzando la differenza tra la funzione e il polinomio si giunge alla formula di Taylor col resto di Lagrange.

Le conoscenze acquisite concorrono a determinare gli elementi che caratterizzano, da un punto di vista qualitativo, il grafico di una funzione.

A partire dal rettangolo, si costruiscono sottoinsiemi più complessi del piano, i *plurirettangoli*: fra questi figurano le *regioni a gradino*. Il metodo di esaurimento, con queste regioni, consentirà di definire l'integrale di Riemann di una funzione limitata a valori non negativi su un intervallo chiuso.

Si dimostra il teorema della media integrale, l'integrabilità delle funzioni monotone e

continue su un intervallo, e il teorema fondamentale del calcolo integrale. Si descrivono le proprietà fondamentali dell'integrale di una funzione di segno qualunque.

I metodi di integrazione consentono il calcolo dell'integrale indefinito delle funzioni razionali e degli integrali che appartengono a una conica di equazione $ax^2 - y^2 + bx + c = 0$.

Le prime applicazioni del calcolo integrale riguardano la definizione delle funzioni iperboliche, dotate di alcune proprietà geometriche analoghe alle corrispondenti proprietà delle ordinarie funzioni goniometriche, l'introduzione degli integrali impropri e l'integrazione numerica.

Combinando i concetti dell'algebra vettoriale con i metodi dell'analisi, molte nozioni e regole del calcolo infinitesimale vengono trasferite, senza sostanziali cambiamenti, dalle funzioni reali di variabile reale a quelle vettoriali di variabile reale.

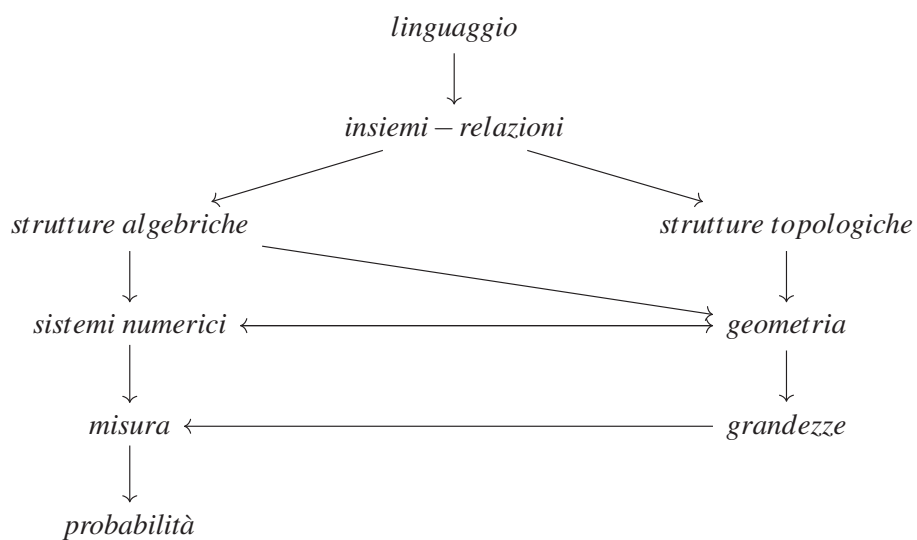
Le equazioni differenziali si prestano a rappresentare semplificazioni idealizzate di un fenomeno naturale e per questo vengono chiamate *modelli matematici* del fenomeno. In questo contesto, viene studiata solo una classe ristretta di equazioni differenziali ordinarie: le equazioni lineari del primo ordine e le equazioni del secondo ordine a coefficienti costanti.

Il calcolo combinatorio si basa su semplici principi che consentono di affrontare problemi di conteggio che riguardano le applicazioni tra insiemi finiti.

La teoria della probabilità ha origine dall'idea di *equieventualità*, motivo per cui si fa riferimento esclusivamente alla definizione classica di probabilità, basata sulla considerazione di un insieme finito di eventi. L'insufficienza di questa definizione, per quei casi che presentano un insieme infinito di risultati, conduce a un'estensione del concetto di probabilità.

La necessità di trovare le probabilità di certi eventi con una condizione supplementare induce a trovare la probabilità condizionata per la definizione classica di probabilità. Utilizzando il teorema della moltiplicazione si perviene alla formula della probabilità totale e alla formula di Bayes.

Nuclei che caratterizzano la disciplina



Questi nuclei sintetizzano alcuni nodi concettuali fondamentali che si ripropongono continuamente nell'ambito della matematica, assumendo quindi per essa valore strutturante.

Indice

1	Proprietà d'insieme delle funzioni	19
1.1	Le funzioni elementari	20
	La funzione potenza di esponente naturale: $f(x) = x^n$	22
	La funzione radice n-esima: $f(x) = \sqrt[n]{x}$	24
	La funzione potenza ad esponente reale: $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$	26
	La funzione modulo (valore assoluto): $f(x) = x $	28
	La funzione esponenziale: $f(x) = b^x, b \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$	29
	La funzione logaritmo: $f(x) = \log_b(x), b \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$	30
	La funzione coseno: $f(x) = \cos(\varphi)$	31
	La funzione arcocoseno: $f(x) = \arccos(\varphi)$	32
	La funzione seno: $f(x) = \sin(\varphi)$	33
	La funzione arcseno: $f(x) = \arcsin(\varphi)$	34
	La funzione tangente: $f(x) = \tan(\varphi)$	35
	La funzione arcotangente: $f(x) = \arctan(\varphi)$	36
	La funzione parte intera: $f(x) = [x]$	37
2	Il calcolo differenziale	39
2.1	Derivata di una funzione reale di variabile reale	41

2.2	L'algebra delle derivate	45
2.3	La derivata logaritmica	49
2.4	Funzioni derivabili in un intervallo	52
2.5	Esercizi	58
3	Applicazioni del calcolo differenziale	67
3.1	Le regole di L'Hôpital	69
3.2	Altri tipi di forme indeterminate	74
3.3	Asintoti	75
3.4	Derivate successive	79
3.5	Funzioni convesse e concave	79
3.6	Formula di Taylor	84
3.7	Studio di una funzione	90
3.8	Esercizi	93

4	Il calcolo integrale	103
4.1	Plurirettangoli e regioni a gradini	107
4.2	Il calcolo integrale per funzioni limitate e non negative	112
4.3	Integrabilità delle funzioni monotone e delle funzioni continue ...	115
4.4	Proprietà dell'integrale	117
4.5	Integrale di funzioni più generali	121
4.6	Integrale indefinito	123
4.7	Regole di integrazione	125
	Metodo di integrazione per parti	125
	Metodo di integrazione per sostituzione	126
4.8	Integrazione delle funzioni razionali	128
4.9	Funzioni integrabili elementarmente	131

4.10	Settore iperbolico e settore circolare	133
4.11	Integrali impropri	136
4.12	Integrazione numerica	139
	(a) metodo dei rettangoli	139
	(b) metodo dei trapezi	140
	(c) metodo delle tangenti	141
	(d) metodo di Cavalieri-Simpson o delle parabole	142
4.13	Esercizi	144
5	Applicazioni del calcolo integrale	151
5.1	Area di un settore curvilineo in coordinate polari	154
5.2	Calcolo del volume di un solido per sezioni parallele	155
5.3	Volume di un solido di rivoluzione	157
5.4	Calcolo del lavoro tramite l'integrale definito	157
5.5	Coordinate del centro di massa	158
	Centro di massa di un arco	159
	Centro di massa di una figura piana	160
5.6	Teoremi di Pappo-Guldino	162
5.7	Esercizi	164
6	Funzioni vettoriali di variabile reale	171
6.1	Algebra dei vettori	173
6.2	Limiti, continuità e derivabilità	174
6.3	Formula di Taylor per una funzione vettoriale di variabile reale ...	176
6.4	Integrale di una funzione vettoriale di variabile reale	177
6.5	Curve nello spazio (nel piano)	180
6.6	Lunghezza di un arco e angolo di due vettori nello spazio euclideo Σ_o	183

6.7	Lunghezza di un arco di curva piana in coordinate polari	186
6.8	Esercizi	187
7	Le equazioni differenziali	191
7.1	Equazioni differenziali lineari del primo ordine	196
7.2	Modelli matematici	199
7.3	Equazioni a variabili separate e separabili	201
7.4	Equazioni del primo ordine omogenee rispetto a x e y	203
7.5	Equazioni differenziali lineari del secondo ordine	204
7.6	Esercizi	208

8	Calcolo combinatorio	215
8.1	Il numero delle applicazioni tra due insiemi finiti	220
8.2	I sottoinsiemi di un insieme finito composti da m elementi	222
8.3	Esercizi	226
9	Calcolo delle probabilità	229
9.1	Eventi certi, impossibili, aleatori	231
9.2	Approcci differenti	232
9.3	Spazio degli eventi	233
9.4	Definizione classica di probabilità	235
9.5	Probabilità geometrica	240
9.6	Costruzione assiomatica della probabilità	242
9.7	Probabilità condizionata	244
9.8	Prove indipendenti	250
9.9	Lo spazio degli eventi di prove indipendenti	252
9.10	Distribuzione binomiale di Jakob Bernoulli	255

9.11	La distribuzione di Siméon-Denis Poisson	257
9.12	Esercizi	259
	Appendici	263
A	Formule	263
B	Tabelle	267
C	Combinatoria-formule	269
D	Profili Biografici	271
	Indice	279

Lista dei simboli e significato

Simbolo



Significato

nota, osservazione

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

insieme dei numeri naturali

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$$

insieme $\mathbb{N}$ privato dello zero¹

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$$

insieme dei numeri interi

$$\mathbb{Q}$$

insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{R}$$

insieme dei numeri reali

$$\mathbb{R}_+$$

insieme dei numeri reali non negativi

$$\mathbb{R}_-$$

insieme dei numeri reali non positivi

$$\in$$

appartiene a, é un elemento di

$$\notin$$

non appartiene a, non é un elemento di

$$=$$

è uguale a

$$\neq$$

è diverso da

$$\stackrel{def}{=}$$

per definizione è uguale a

$$\implies$$

se $\dots$ allora $\dots$

$$\iff$$

$\dots$ se e solo se $\dots$

$$\stackrel{def}{\iff}$$

equivale per definizione

Continua alla pagina successiva

¹gli insiemi numerici il cui simbolo presenta in apice un asterisco si intendono privati dello zero

Continua dalla pagina precedente

Simbolo	Significato
$\subset$	é contenuto in
$\supset$	contiene
$\cup$	unito a
$\cap$	intersecato con
$\emptyset$	insieme vuoto, insieme che non ha elementi
$A \setminus B$	insieme differenza fra A e B
X^c	complemento di X rispetto all'universo U
$A \times B$	prodotto cartesiano fra A e B
(a, b)	coppia ordinata
$\{X \xrightarrow{f} Y; x \mapsto f(x)\}$	notazione di funzione
1_X	applicazione identica di un insieme X
$\vec{xy}$	vettore libero associato alla coppia (x, y)
$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ oppure $[a_1, a_2]^T$	coordinate di un punto o componenti di un vettore
EG	metodo di eliminazione delle incognite o di Gauss
$f'(x_o), \left. \frac{df}{dx} \right _{x=x_o}, Df(x_o), \dot{f}(x_o)$	derivata di una funzione
$df = f'(x_o) \cdot \Delta x$	differenziale di una funzione f nel punto x_o
$\int_b f(x) dx$	integrale indefinito di una funzione f
$\int_a^b f(x) dx$	integrale definito su $[a, b]$ di una funzione f
$C_{n,m} = \binom{n}{m}$	coefficienti binomiali
$p(E)$	probabilità dell'evento casuale (E)

Alfabeto Greco

Minuscola	Maiuscola	Nome latino
α	A	alfa
β	B	beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ε, ϵ	E	epsilon
ζ	Z	zeta
η	H	eta
θ, ϑ	Θ	theta
ι	I	iota
$\kappa, \varkappa$	K	kappa
λ	Λ	lambda
μ	M	my
ν	N	ny
ξ	Ξ	xi
$\omicron$	O	omicron
π, ϖ	Π	pi
ρ	P	rho
σ, ς	Σ	sigma

Continua alla pagina successiva

Continua dalla pagina precedente

Minuscola	Maiuscola	Nome latino
τ	T	tau
υ	Υ	ypsilon
ϕ, φ	Φ	phi
χ	X	chi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

1	Proprietà d'insieme delle funzioni	19
1.1	Le funzioni elementari	20
2	Il calcolo differenziale	39
2.1	Derivata di una funzione reale di variabile reale	41
2.2	L'algebra delle derivate	45
2.3	La derivata logaritmica	49
2.4	Funzioni derivabili in un intervallo	52
2.5	Esercizi	58
3	Applicazioni del calcolo differenziale	67
3.1	Le regole di L'Hôpital	69
3.2	Altri tipi di forme indeterminate	74
3.3	Asintoti	75
3.4	Derivate successive	79
3.5	Funzioni convesse e concave	79
3.6	Formula di Taylor	84
3.7	Studio di una funzione	90
3.8	Esercizi	93

