



*Classificazione Decimale Dewey:*

**510.71 (23.) MATEMATICA. Educazione**

*Soggetto Thema:*

**PBC. Fondamenti della matematica**

*Qualificatori Thema:*

**4CN. Per l'istruzione secondaria**

CARLO MATURO  
TERESA MATURO

# FARE MATEMATICA

VOLUME II





ISBN  
979-12-218-2585-5

PRIMA EDIZIONE  
**ROMA 12 MARZO 2026**

## Presentazione

La misura degli angoli è definita come un omomorfismo continuo  $\mu$  del gruppo additivo  $(\mathbb{R}, +)$  sul gruppo additivo delle rotazioni di centro assegnato  $(\mathcal{R}_c, +)$ ; il nucleo di  $\mu$  è l'insieme dei multipli interi di un numero  $\varpi$ , detto periodo di  $\mu$ .

Se  $\mu$  è una misura positiva fatta in radianti e  $(o, \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\})$  un sistema ortonormale di  $\Pi_o$ , si ha la possibilità di definire le funzioni coseno e seno come le coordinate di un punto della circonferenza goniometrica  $\Gamma_{(o,1)}$ .

Dopo aver definito le altre funzioni goniometriche, si determina l'immagine del coseno e del seno per particolari frazioni di  $\pi$ .

Si analizza il legame che intercorre fra i valori delle funzioni goniometriche di *angoli associati* da uguaglianze particolari.

Ricorrendo al gruppo delle rotazioni intorno all'origine del piano puntato  $(\mathcal{R}_o, +)$ , si genera un *caleidoscopio* di identità goniometriche che si rivelano utili nella risoluzione di equazioni e disequazioni.

Tuttavia, l'importanza fondamentale del gruppo  $(\mathcal{R}_o, +)$  si manifesta nella costruzione del campo dei numeri complessi che si rifà alla natura geometrica di questi oggetti. Infatti, il gruppo delle rotazioni  $(\mathcal{R}_o, +)$  e quello delle omotetie  $(\mathcal{H}_o, \times)$  consentono di passare dal campo  $(\mathbb{R}, +, \times)$  dei numeri reali a quello  $(\mathbb{C}, +, \times)$  dei numeri complessi in un modo semplice e ricco di significati.

Al capitolo terzo è affidato il problema della risoluzione di ogni tipo di triangolo tramite il teorema dei seni e/o del coseno.

Lo studio della geometria dello spazio ordinario ha un approccio del tutto identico a quello del piano. Quindi, lo spazio puntato  $\Sigma_o$  è considerato da subito uno spazio vettoriale sul campo dei numeri reali  $(\mathbb{R}, +, \times)$ .

Le proiezioni oblique insieme alle simmetrie ortogonali rispetto a un piano sono i primi esempi di applicazioni lineari; ciascuna è rappresentata, rispetto a una determinata base, da una matrice.

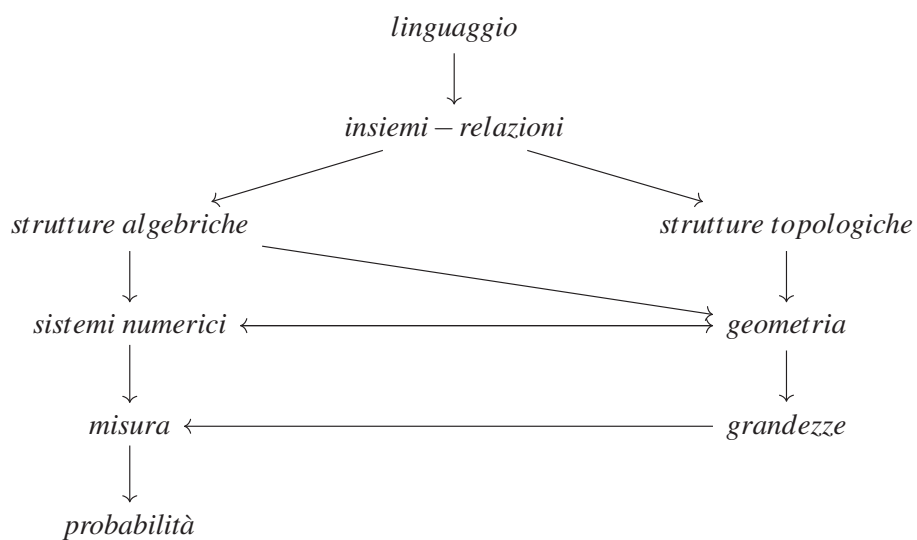
Definito il prodotto scalare, si studiano le proprietà algebriche del prodotto vettoriale di due vettori e del prodotto misto di tre vettori.

Acquisiti gli elementi di algebra lineare, si ha a disposizione una struttura che viene usata per semplificare procedure e calcoli della geometria analitica dello spazio, recare un aiuto prezioso anche all'insegnamento della fisica, ecc.

Col settimo capitolo inizia lo studio dell'analisi. Le progressioni geometriche determinano la costruzione di un omomorfismo del gruppo  $(\mathbb{Q}, +)$  nel gruppo  $(\mathbb{R}^*, \times)$  che porta il numero 1 in un numero positivo  $b$ . Esso può essere prolungato in un unico *omomorfismo continuo* di  $(\mathbb{R}, +)$  in  $\{\mathbb{R}_+^*, \times\}$  dal nome di *funzione esponenziale di base  $b$* , che viene indicato con  $x \mapsto b^x$ . Se  $b \neq 1$ , l'omomorfismo inverso si dice *logaritmo di base  $b$*  e si denota col simbolo  $y \mapsto \log_b y$ .

Riferito il piano  $\Pi_o$  a un sistema ortonormale, la distanza pitagorica, con le sue proprietà, fa di  $\Pi_o$  uno spazio metrico. Le proprietà della famiglia degli intorni di un punto rendono, a sua volta,  $\Pi_o$  uno spazio topologico; la continuità e la teoria dei limiti delle funzioni reali di variabile reale si fondano su tale tipo di struttura.

### Nuclei che caratterizzano la disciplina



Questi nuclei sintetizzano alcuni nodi concettuali fondamentali che si ripropongono continuamente nell'ambito della matematica, assumendo quindi per essa valore strutturante.



# Indice

|            |                                                        |           |
|------------|--------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>   | <b>Goniometria</b>                                     | <b>21</b> |
| <b>1.1</b> | <b>Misura degli angoli</b>                             | <b>24</b> |
|            | Proprietà della misura $\mu$                           | 25        |
| <b>1.2</b> | <b>Misura in gradi</b>                                 | <b>26</b> |
| <b>1.3</b> | <b>Le funzioni di proiezione</b>                       | <b>27</b> |
|            | Diagramma del coseno e del seno                        | 29        |
| <b>1.4</b> | <b>La tangente e il concetto di limite infinito</b>    | <b>30</b> |
| <b>1.5</b> | <b>La cotangente e la cosecante</b>                    | <b>32</b> |
| <b>1.6</b> | <b>Valori particolari delle funzioni coseno e seno</b> | <b>33</b> |
|            | Angolo di $\frac{\pi}{10}$ radianti                    | 34        |
|            | Angolo di $\frac{\pi}{6}$ radianti                     | 35        |
|            | Angolo di $\frac{\pi}{4}$ radianti                     | 36        |
| <b>1.7</b> | <b>Gli angoli e le simmetrie</b>                       | <b>37</b> |
|            | Angoli opposti                                         | 37        |
|            | Angoli complementari                                   | 38        |
|            | Angoli che differiscono di $\frac{\pi}{2}$             | 39        |

|                                                                  |           |
|------------------------------------------------------------------|-----------|
| Angoli supplementari                                             | 39        |
| Angoli che differiscono di $\pi$                                 | 40        |
| <b>1.8 Formule di addizione (sottrazione)</b>                    | <b>41</b> |
| Formule di duplicazione, bisezione, ecc.                         | 42        |
| Formule parametriche                                             | 43        |
| Formule del Werner                                               | 44        |
| Formule di prostaferesi                                          | 45        |
| <b>1.9 Le equazioni goniometriche</b>                            | <b>45</b> |
| Risoluzione dell'equazione elementare $\cos(\varphi) = c$        | 46        |
| Risoluzione dell'equazione elementare $\sin(\varphi) = s$        | 46        |
| Risoluzione dell'equazione elementare $\tan(\varphi) = t$        | 47        |
| <b>1.10 Equazioni lineari in seno e coseno</b>                   | <b>47</b> |
| <b>1.11 Equazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno</b> | <b>48</b> |
| <b>1.12 Equazioni simmetriche</b>                                | <b>48</b> |
| <b>1.13 Equazioni biquadratiche omogenee in seno e coseno</b>    | <b>49</b> |
| <b>1.14 Un cenno alle disequazioni goniometriche</b>             | <b>49</b> |
| <b>1.15 Esercizi</b>                                             | <b>51</b> |
| <b>2 Numeri Complessi</b>                                        | <b>61</b> |
| <b>2.1 Le rototomotetie</b>                                      | <b>63</b> |
| <b>2.2 È possibile ordinare l'insieme dei numeri complessi?</b>  | <b>68</b> |
| <b>2.3 Numeri complessi coniugati</b>                            | <b>69</b> |
| Potenze di numeri complessi                                      | 70        |
| Radici di numeri complessi                                       | 70        |
| Radici dell'unità                                                | 72        |
| <b>2.4 Forma esponenziale di un numero complesso</b>             | <b>74</b> |
| <b>2.5 Esercizi</b>                                              | <b>76</b> |
| <b>3 Trigonometria piana</b>                                     | <b>81</b> |
| <b>3.1 Risoluzione dei triangoli rettangoli</b>                  | <b>83</b> |

|     |                                    |    |
|-----|------------------------------------|----|
| 3.2 | Teorema dei seni . . . . .         | 84 |
| 3.3 | Teorema delle proiezioni . . . . . | 86 |
|     | Permutazioni circolari . . . . .   | 86 |
| 3.4 | Teorema del coseno . . . . .       | 87 |
| 3.5 | Teorema delle tangenti . . . . .   | 89 |
| 3.6 | Esercizi . . . . .                 | 90 |

|          |                                                                          |            |
|----------|--------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>4</b> | <b>Lo spazio vettoriale <math>\Sigma_o</math> . . . . .</b>              | <b>95</b>  |
| 4.1      | Le proiezioni oblique . . . . .                                          | 97         |
| 4.2      | Sistema di assi . . . . .                                                | 100        |
| 4.3      | Basi e coordinate . . . . .                                              | 102        |
| 4.4      | Le trasformazioni lineari e le basi . . . . .                            | 103        |
| 4.5      | La matrice di una trasformazione lineare . . . . .                       | 105        |
| 4.6      | Algoritmo per trovare la matrice di un operatore lineare . . . . .       | 106        |
| 4.7      | Cambiamento di basi e trasformazioni lineari . . . . .                   | 107        |
| 4.8      | Esercizi . . . . .                                                       | 109        |
| <b>5</b> | <b>La struttura metrica dello spazio <math>\Sigma_o</math> . . . . .</b> | <b>115</b> |
| 5.1      | Le simmetrie rispetto a un piano . . . . .                               | 118        |
| 5.2      | Le isometrie . . . . .                                                   | 120        |
| 5.3      | Rotazioni e diedri . . . . .                                             | 127        |
| 5.4      | Il gruppo delle isometrie intorno a una retta . . . . .                  | 131        |
| 5.5      | Il rapporto di proiezione . . . . .                                      | 134        |
| 5.6      | Il prodotto vettoriale . . . . .                                         | 135        |
| 5.7      | Proprietà algebriche del prodotto vettoriale . . . . .                   | 138        |
| 5.8      | Espressione del prodotto vettoriale tramite coordinate . . . . .         | 141        |

|      |                                     |     |
|------|-------------------------------------|-----|
| 5.9  | Prodotto misto di tre vettori ..... | 142 |
| 5.10 | Esercizi .....                      | 145 |

## 6 Algebra lineare e geometria dello spazio ..... 155

|     |                                           |     |
|-----|-------------------------------------------|-----|
| 6.1 | Equazioni parametriche di una retta ..... | 158 |
| 6.2 | Equazione cartesiana di un piano .....    | 159 |
| 6.3 | Distanza di un punto da un piano .....    | 160 |
| 6.4 | Distanza di un punto da una retta .....   | 162 |
| 6.5 | Distanza tra due rette sghembe .....      | 165 |
| 6.6 | Esercizi .....                            | 167 |

## 7 Successioni, funzioni esponenziali e logaritmi ..... 175

|     |                                                           |     |
|-----|-----------------------------------------------------------|-----|
| 7.1 | Le successioni .....                                      | 177 |
|     | Le progressioni aritmetiche .....                         | 178 |
|     | Le progressioni geometriche .....                         | 179 |
|     | La funzione esponenziale e la sua inversa logaritmo ..... | 182 |
| 7.2 | Alcune successioni interessanti .....                     | 184 |
|     | Dalle successioni alle serie .....                        | 185 |
|     | L'algoritmo di Erone .....                                | 187 |
| 7.3 | Esercizi .....                                            | 189 |

## 8 Topologia degli spazi metrici ..... 195

|     |                                               |     |
|-----|-----------------------------------------------|-----|
| 8.1 | La famiglia degli intorno di un punto .....   | 198 |
| 8.2 | La retta reale .....                          | 201 |
| 8.3 | Punti aderenti e punti di accumulazione ..... | 204 |
| 8.4 | Le funzioni reali di variabile reale .....    | 204 |

|          |                                                                       |            |
|----------|-----------------------------------------------------------------------|------------|
| 8.5      | Continuità delle funzioni reali di variabile reale .....              | 205        |
| 8.6      | Proprietà delle funzioni continue su un intervallo .....              | 208        |
| 8.7      | L'inversa di una funzione .....                                       | 212        |
| 8.8      | Continuità delle funzioni elementari .....                            | 215        |
| 8.9      | Esercizi .....                                                        | 220        |
| <b>9</b> | <b>Teoria dei limiti .....</b>                                        | <b>225</b> |
| 9.1      | Definizione di limite .....                                           | 227        |
| 9.2      | Limiti di funzioni reali di variabile reale .....                     | 230        |
| 9.3      | La retta ampliata .....                                               | 235        |
|          | Limite di una successione reale .....                                 | 236        |
| 9.4      | Punti di discontinuità e prolungamento per continuità di una funzione | 237        |
| 9.5      | Esercizi .....                                                        | 241        |
|          | <b>Appendici .....</b>                                                | <b>245</b> |
| <b>A</b> | <b>Formule e tabelle .....</b>                                        | <b>245</b> |
| <b>B</b> | <b>Identità vettoriali .....</b>                                      | <b>249</b> |
| <b>C</b> | <b>Limiti notevoli .....</b>                                          | <b>251</b> |
| <b>D</b> | <b>Assiomatica per lo spazio ordinario .....</b>                      | <b>253</b> |
| D.1      | Assiomi di relazione .....                                            | 253        |
| D.2      | Assiomi del parallelismo .....                                        | 253        |
| D.3      | Assiomi di esistenza delle isodirezioni .....                         | 254        |
| D.4      | Assiomi dell'ordine .....                                             | 254        |
| D.5      | Assiomi della continuità .....                                        | 254        |
| D.6      | Assioma dell'ortogonalità .....                                       | 254        |
| D.7      | Assioma del piano bisecante .....                                     | 254        |
| D.8      | Assioma della rotazione .....                                         | 254        |

|          |                                 |            |
|----------|---------------------------------|------------|
| <b>E</b> | <b>Profili Biografici .....</b> | <b>255</b> |
|          | <b>Indice .....</b>             | <b>263</b> |

## Lista dei simboli e significato

### Simbolo



### Significato

nota, osservazione

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

insieme dei numeri naturali

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$$

insieme  $\mathbb{N}$  privato dello zero<sup>1</sup>

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$$

insieme dei numeri interi

$$\mathbb{Q}$$

insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{R}$$

insieme dei numeri reali

$$\mathbb{R}_+$$

insieme dei numeri reali non negativi

$$\mathbb{R}_-$$

insieme dei numeri reali non positivi

$$\mathbb{C}$$

insieme dei numeri complessi

$$\in$$

appartiene a, é un elemento di

$$\notin$$

non appartiene a, non é un elemento di

$$=$$

è uguale a

$$\neq$$

è diverso da

$$\stackrel{def}{=}$$

per definizione è uguale a

$$I \implies T$$

se  $I$  allora  $T$

$$I \iff T$$

$I$  se e solo se  $T$

*Continua alla pagina successiva*

---

<sup>1</sup>gli insiemi numerici il cui simbolo presenta in apice un asterisco si intendono privati dello zero

*Continua dalla pagina precedente*

| <b>Simbolo</b>                                | <b>Significato</b>                                 |
|-----------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| $B \subset A$                                 | l'insieme $B$ è contenuto nell'insieme $A$         |
| $A \supset B$                                 | l'insieme $A$ contiene l'insieme $B$               |
| $\emptyset$                                   | insieme vuoto, insieme che non ha elementi         |
| $A \cup B$                                    | unione di due insiemi                              |
| $A \cap B$                                    | intersezione di due insiemi                        |
| $P(U)$                                        | insieme dei sottoinsiemi propri e impropri di $U$  |
| $A \setminus B$                               | insieme differenza fra $A$ e $B$                   |
| $X^c$                                         | complemento di $X$ rispetto all'universo $U$       |
| $A \times B$                                  | prodotto cartesiano fra $A$ e $B$                  |
| $(a, b)$                                      | coppia ordinata                                    |
| $\{X \xrightarrow{f} Y; x \mapsto f(x)\}$     | notazione di funzione                              |
| $f _S$                                        | restrizione della funzione $f$ all'insieme $S$     |
| $t_X$                                         | applicazione identica di un insieme $X$            |
| $R \parallel S$                               | la retta $R$ è parallela alla retta $S$            |
| $R \nparallel S$                              | la retta $R$ non è parallela alla retta $S$        |
| $\vec{xy}$                                    | vettore libero associato alla coppia $(x, y)$      |
| $\Pi_o$                                       | piano sul quale si è fissato il punto $o$          |
| $\bar{S}$                                     | semiretta contenuta nella retta $S$                |
| $s_o$                                         | simmetria centrale con centro nel punto $o$        |
| $\mathbb{S}_A^\delta$                         | simmetria assiale di asse $A$ e direzione $\delta$ |
| $\mathbb{S}_A$                                | simmetria ortogonale di asse $A$                   |
| $(\bar{S}, \bar{S}')$                         | coppia di semirette di origine $o$                 |
| $\widehat{\bar{S}\bar{S}'}$                   | angolo di vertice $o$                              |
| $(\mathcal{R}_o, \circ) = (\mathcal{A}_o, +)$ | gruppo delle rotazioni o degli angoli              |
| $\mathcal{O}$                                 | relazione di orientazione degli angoli             |
| $\Gamma_{(o,1)}$                              | circonferenza goniometrica                         |
| $\square$                                     | fascio di piani paralleli o giacitura              |
| $\parallel \perp \square$                     | direzione ortogonale a una giacitura               |

*Continua alla pagina successiva*

---

*Continua dalla pagina precedente*

| <b>Simbolo</b>                                                   | <b>Significato</b>                                |
|------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ oppure $[a_1, a_2]^T$ | coordinate di un punto o componenti di un vettore |
| <b>EG</b>                                                        | metodo di eliminazione delle incognite o di Gauss |
| $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$           | partizione di un intervallo                       |



## Alfabeto Greco

| Minuscola               | Maiuscola | Nome latino |
|-------------------------|-----------|-------------|
| $\alpha$                | $A$       | alfa        |
| $\beta$                 | $B$       | beta        |
| $\gamma$                | $\Gamma$  | gamma       |
| $\delta$                | $\Delta$  | delta       |
| $\varepsilon, \epsilon$ | $E$       | epsilon     |
| $\zeta$                 | $Z$       | zeta        |
| $\eta$                  | $H$       | eta         |
| $\theta, \vartheta$     | $\Theta$  | theta       |
| $\iota$                 | $I$       | iota        |
| $\kappa, \varkappa$     | $K$       | kappa       |
| $\lambda$               | $\Lambda$ | lambda      |
| $\mu$                   | $M$       | my          |
| $\nu$                   | $N$       | ny          |
| $\xi$                   | $\Xi$     | xi          |
| $\omicron$              | $O$       | omicron     |
| $\pi, \varpi$           | $\Pi$     | pi          |
| $\rho$                  | $P$       | rho         |
| $\sigma, \varsigma$     | $\Sigma$  | sigma       |

*Continua alla pagina successiva*

*Continua dalla pagina precedente*

| <b>Minuscola</b> | <b>Maiuscola</b> | <b>Nome latino</b> |
|------------------|------------------|--------------------|
| $\tau$           | $T$              | tau                |
| $\upsilon$       | $\Upsilon$       | ypsilon            |
| $\phi, \varphi$  | $\Phi$           | phi                |
| $\chi$           | $X$              | chi                |
| $\psi$           | $\Psi$           | psi                |
| $\omega$         | $\Omega$         | omega              |