



Classificazione Decimale Dewey:

510.71 (23.) MATEMATICA. Educazione

Soggetto Thema:

PBC. Fondamenti della matematica

Qualificatori Thema:

4CN. Per l'istruzione secondaria

CARLO MATURO
TERESA MATURO

FARE MATEMATICA

VOLUME I





©

ISBN
979-12-218-2584-8

PRIMA EDIZIONE
ROMA 12 MARZO 2026

Una breve premessa

Lo stato di confusione in cui si trova l'insegnamento matematico-scientifico, nella scuola secondaria superiore, necessita di nuovi e validi itinerari didattici. Mai come oggi, se non si vuole svuotare la scuola di ogni contenuto che non sia formalistica somministrazione di nozioni, abbiamo bisogno nell'insegnamento secondario di un nuovo punto di vista che richiede familiarità nell'adoperare certe nozioni, fra le quali la più importante è quella di *applicazione* e ancor più quella di *calcolo sulle applicazioni*. Si può dire, senza esagerazione, che si tratta di "pietre angolari" per tutto l'edificio della matematica contemporanea.

Grazie ad esse, si mettono a fuoco, e in modo organico, alcune idee direttrici per l'insegnamento della matematica nei licei. Tuttavia, un requisito essenziale per l'innovazione didattica è che si compia *davvero* una *riforma scolastica seria*, e non solo di facciata¹.

Ci auguriamo che quest'opera risponda alle esigenze pressanti di cambiamento e che queste permettano di diffonderla e di approfondirla.

La presente stesura viene pubblicata in forma provvisoria perché gli autori si augurano di ricevere dai lettori critiche e consigli, in modo da migliorarla.

¹"la riforma dell'insegnamento della matematica non si può limitare ad aggiungere questo o quel capitolo, ma deve comportare un riesame completo delle mete formative, e quindi dei contenuti e della metodologia"

Presentazione

Le relazioni di parallelismo e di ortogonalità, utilizzate nel contesto euclideo per lo studio delle figure (uso locale), diventano gli elementi basilari per indagare, grazie all'algebra contemporanea, proprietà del piano e dello spazio "interi"(uso globale).

Attraverso un'assiomatica geometrica adeguata, predisponiamo un approdo alla struttura vettoriale del piano; fondamentale è l'impiego degli assiomi **T** ed **H** per il loro collegamento al ruolo importante delle *traslazioni* e delle *omotetie* nella costruzione del campo dei numeri reali, primo esempio di spazio vettoriale.

Vedremo come le regole per il calcolo con le matrici sono una logica conseguenza della rappresentazione delle applicazioni lineari tramite questi nuovi oggetti.

A questo punto, definita la nozione di ortogonalità, introdurremo le simmetrie rispetto a una retta, e quindi le isometrie come composizione di simmetrie. Studieremo il gruppo delle rotazioni intorno a un punto al fine di definire la nozione di angolo. Analizzeremo il rapporto tra le trasformazioni ortogonali e le similitudini.

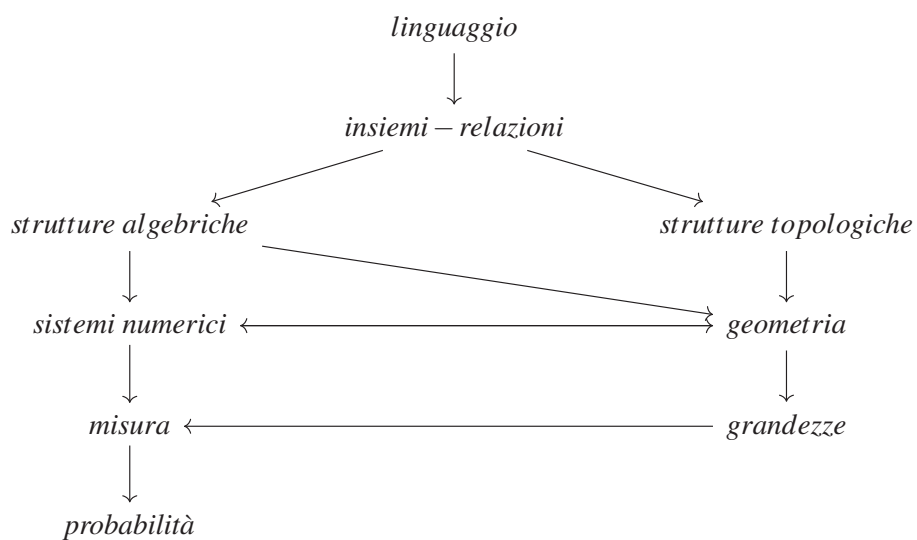
In seguito, parleremo di distanza e norma di un vettore. Tramite il rapporto di proiezione fra due semirette, definiremo il prodotto scalare di due vettori liberi e stabiliremo un'importante disuguaglianza, quella di Cauchy-Schwartz.

Acquisiti gli elementi di algebra lineare, disponiamo di una macchina-utensile che viene usata per semplificare procedure e calcoli della geometria analitica, analizzare proprietà geometriche delle coniche, recare un aiuto prezioso anche all'insegnamento della fisica, ecc.

Il ricorso a specifici software di geometria dinamica e di calcolo numerico rende unico e

intrigante questo tipo di approccio allo studio delle matematiche.

Nuclei che caratterizzano la disciplina



Questi nuclei sintetizzano alcuni nodi concettuali fondamentali che si ripropongono continuamente nell'ambito della matematica, assumendo quindi per essa valore strutturante.

Indice

1	<i>μάθημα</i>	25
1.1	Elementi di teoria degli insiemi	27
1.2	L'algebra degli insiemi	29
1.3	L'insieme prodotto; relazioni e applicazioni fra insiemi	32
1.4	Tipi fondamentali di relazione binaria in un insieme	33
1.5	Le relazioni di equivalenza dette congruenze	34
1.6	Le applicazioni	37
	Criterio di uguaglianza per le applicazioni tra insiemi	38
	La composizione delle applicazioni	40
	Applicazione inversa	40
	Che cos'è un'equazione?	42
	Che cos'è una disequazione?	43
	Le applicazioni e l'ordine	44
1.7	Un po' di logica delle proposizioni	44
1.8	Cenni di logica dei predicati	47
1.9	Metodi dimostrativi	48

1.10	Esercizi	56
------	----------	----

2 I numeri reali 65

2.1	La nozione di gruppo	67
-----	----------------------	----

2.2	Le isodirezioni	69
-----	-----------------	----

2.3	Vettori e sottogruppi	75
-----	-----------------------	----

	Il sottogruppo delle traslazioni $(\mathcal{T}, \circ)$	75
--	---	----

	Il sottogruppo delle traslazioni di direzione assegnata $(\mathcal{T}_{dir(\tau)}, \circ)$	80
--	--	----

2.4	Gruppo di simmetrie e “uguaglianza”	81
-----	-------------------------------------	----

	Centro o punto medio di due punti	82
--	-----------------------------------	----

2.5	Il sottogruppo delle omotetie concentriche $(\mathcal{H}_\circ, \circ)$	83
-----	---	----

	Un’omotetia speciale	86
--	----------------------	----

2.6	Il gruppo delle simmetrie centrali e delle traslazioni	86
-----	--	----

2.7	L’importanza dell’ordine in geometria	88
-----	---------------------------------------	----

2.8	Graduazione o scala grafica	90
-----	-----------------------------	----

	Divisione di un segmento in “n” parti uguali per traslazione	91
--	--	----

2.9	Numeri illimitati e numeri reali	92
-----	----------------------------------	----

2.10	Estremo superiore (inferiore) di un insieme numerico	95
------	--	----

2.11	Alcune funzioni reali	96
------	-----------------------	----

	La funzione modulo	97
--	--------------------	----

	La funzione segno	98
--	-------------------	----

	La funzione radice quadrata	98
--	-----------------------------	----

2.12	Esercizi	100
------	----------	-----

3	La struttura vettoriale del piano puntato	107
3.1	Lo spazio vettoriale di una retta	110
	Moltiplicazione di una traslazione per un numero reale	111
3.2	La struttura di spazio vettoriale dell'insieme Π_o	114
3.3	La proiezione obliqua	115
3.4	Le applicazioni lineari	118
3.5	Sistema di assi	119
3.6	Basi e coordinate	120
	Equazioni di una traslazione rispetto a una base assegnata	121
	Trasformazione delle coordinate in una traslazione del sistema di riferimento	122
3.7	Le trasformazioni lineari e le basi	124
3.8	La matrice di una trasformazione lineare	126
3.9	Il calcolo con le matrici	127
	La trasposizione	129
	L'addizione tra matrici	130
	La moltiplicazione per uno scalare	130
	La moltiplicazione tra matrici	131
	Matrici speciali	134
	Proprietà delle operazioni introdotte	139
3.10	Le matrici di alcune trasformazioni lineari di Π_o	139
3.11	Esercizi	142
4	La struttura metrica	151
4.1	Le simmetrie rispetto a una retta	153
4.2	Le simmetrie ortogonali e le isometrie	157
	Il gruppo delle isometrie intorno a un punto	162
	Composizione di più simmetrie ortogonali	165

4.3	Distanza di due punti e norma di un vettore	167
4.4	Il rapporto di proiezione	170
4.5	Il prodotto scalare	172
4.6	Prodotto scalare e norma in una base qualsiasi	173
	La disuguaglianza di Cauchy-Schwartz	174
4.7	Le rotazioni e gli angoli	175
	Misura degli angoli	179
	Proprietà della misura μ	180
	Le funzioni di proiezione	182
	Matrice di una rotazione rispetto a una base ortonormale	183
4.8	Orientazione degli angoli	185
	La matrice della composizione di due rotazioni	185
4.9	Le trasformazioni ortogonali e le similitudini	186
4.10	Le coordinate polari	188
	Coordinate cartesiane ortogonali e coordinate polari	188
	Trasformazione delle coordinate in una rotazione del sistema di riferimento	190
4.11	Esercizi	192

5	Algebra lineare e geometria del piano	201
5.1	Formula della sezione	203
5.2	Equazione vettoriale di una retta	204
5.3	Equazione cartesiana della retta e prodotto scalare	205
5.4	Distanza di un punto da una retta	208
5.5	Intersezione di due rette e sistemi di equazioni lineari	209
5.6	Matrice inversa	214
5.7	I determinanti	217
5.8	Equazione di un fascio di rette	223

5.9	Equazioni algebriche - Curve algebriche	224
5.10	Esercizi	227
6	La circonferenza	235
6.1	Sistemi e fasci di curve	238
6.2	Equazioni parametriche di una curva	239
6.3	La circonferenza in coordinate polari	240
6.4	Tangente ad una circonferenza in un punto	241
6.5	intersezioni di una circonferenza con una retta	243
6.6	Intersezioni di due circonferenze: l'asse radicale	243
6.7	Fasci di circonferenze	244
6.8	Condizione di ortogonalità di due circonferenze	246
6.9	L'inversione circolare: una trasformazione non lineare	248
6.10	Esercizi	252

7	Sezioni di una superficie rotonda con un piano	259
7.1	Le sezioni di una superficie conica circolare	266
7.2	Eccentricità e forma di una conica	268
	L'ellisse	268
	La parabola	269
	L'iperbole	270
7.3	Esercizi	271
8	Equazione canonica di una conica	273
8.1	Equazione vettoriale di una conica	275
8.2	Equazioni polari delle coniche	276

8.3	L'equazione cartesiana dell'ellisse	277
	La forma dell'ellisse	281
	Eccentricità dell'ellisse	283
	Costruzione dell'ellisse per punti	284
8.4	L'equazione cartesiana dell'iperbole	285
	Studio della forma dell'iperbole	287
	Eccentricità dell'iperbole	290
8.5	L'equazione cartesiana della parabola	290
	Studio della forma della parabola	292
8.6	Proprietà ottiche delle curve del secondo ordine	293
8.7	Diametri delle curve del secondo ordine	295
	Diametri coniugati	299
8.8	Esercizi	301
9	Riduzione di una conica alla forma canonica	309
9.1	Riduzione dell'equazione generale alla forma canonica	311
	Condizione (R)	313
	Condizione (T)	314
9.2	Gli invarianti ortogonali	315
9.3	Esercizi	318
	Appendici	321
A	I polinomi: un problema!	321
A.1	Polinomi da un punto di vista della teoria delle funzioni	322
A.2	Operazioni elementari sui polinomi	323
A.3	Zeri di un polinomio	326
B	Schema di Sarrus	329

C	Assiomatica per il piano ordinario	331
C.1	Assiomi di relazione	331
C.2	Assioma del parallelismo	331
C.3	Assiomi di esistenza delle isodirezioni	331
C.4	Assiomi dell'ordine	332
C.5	Assiomi della continuità	332
C.6	Assioma dell'ortogonalità	332
C.7	Assioma della bisettrice	332
C.8	Assioma della rotazione	332
D	Profili Biografici	333
	Indice	339

Lista dei simboli e significato

Simbolo	Significato
	nota, osservazione
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$	insieme dei numeri naturali
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$	insieme $\mathbb{N}$ privato dello zero ²
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$	insieme dei numeri interi
$\mathbb{Q}$	insieme dei numeri razionali
$\mathbb{R}$	insieme dei numeri reali
$\mathbb{R}_+$	insieme dei numeri reali non negativi
$\mathbb{R}_-$	insieme dei numeri reali non positivi
$\in$	appartiene a, é un elemento di
$\notin$	non appartiene a, non é un elemento di
$=$	è uguale a
$\neq$	è diverso da
$\stackrel{def}{=}$	per definizione è uguale a
$I \implies T$	se I allora T
$I \iff T$	I se e solo se T
$B \subset A$	l'insieme B è contenuto nell'insieme A
<i>Continua alla pagina successiva</i>	

²gli insiemi numerici il cui simbolo presenta in apice un asterisco si intendono privati dello zero

Continua dalla pagina precedente

Simbolo	Significato
$A \supset B$	l'insieme A contiene l'insieme B
$\emptyset$	insieme vuoto, insieme che non ha elementi
$A \cup B$	unione di due insiemi
$A \cap B$	intersezione di due insiemi
$P(U), 2^U$	insieme dei sottoinsiemi propri e impropri di U
$A \setminus B$	insieme differenza fra A e B
X^c	complemento di X rispetto all'universo U
$A \times B$	prodotto cartesiano fra A e B
(a, b)	coppia ordinata
$cl(x)$	classe di equivalenza dell'elemento x
$\{X \xrightarrow{f} Y; x \mapsto f(x)\}$	notazione di funzione
$f _S$	restrizione della funzione f all'insieme S
ι_X	applicazione identica di un insieme X
$R \parallel S$	la retta R è parallela alla retta S
$R \nparallel S$	la retta R non è parallela alla retta S
$\mathcal{I}$	insieme delle isodirezioni
$\mathcal{T}$	insieme delle traslazioni
$\mathcal{H}$	insieme delle omotetie
$\mathcal{H}^*$	insieme delle omotetie non nulle
$\vec{xy}$	vettore libero associato alla coppia (x, y)
Π_o	piano sul quale si è fissato il punto o
$(\mathcal{I}, \circ)$	gruppo delle isodirezioni
$(\mathcal{T}, +)$	gruppo additivo delle traslazioni
$(\mathcal{H}_o, \cdot)$	gruppo moltiplicativo delle omotetie di centro o
$\mathfrak{S}_{\overline{\mathcal{T}}}$	gruppo delle simmetrie centrali e delle traslazioni
$\mathcal{L}(\Pi_o)$	insieme delle trasformazioni lineari di Π_o
$\mathcal{GL}(\Pi_o)$	gruppo lineare generale di Π_o
$\overline{S}$	semiretta contenuta nella retta S

Continua alla pagina successiva