



Classificazione Decimale Dewey:

515.0285 (23.) ANALISI MATEMATICA. Elaborazione dei dati, Applicazioni dell'elaboratore.

Soggetto Thema:

PBW. Matematica applicata

Qualificatori Thema:

4CT. Per l'istruzione superiore/terziaria/universitaria

**ELMO BENEDETTO, PATRIZIA DI GIRONIMO
GERARDO IOVANE, GIUSEPPE MARSEGLIA**

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA PER INFORMATICI





ISBN
979-12-218-2571-8

PRIMA EDIZIONE
ROMA 17 MARZO 2026

Indice

PREFAZIONE	13
CAPITOLO 1.....	15
CALCOLO COMBINATORIO.....	15
1.1. Introduzione	15
1.2. Disposizioni.....	18
1.3. Permutazioni.....	20
1.4. Combinazioni	23
CAPITOLO 2.....	25
PRINCIPIO DI INDUZIONE	25
2.1 Introduzione	25
2.2 Esercizi.....	25
CAPITOLO 3.....	37
EQUAZIONI DIOFANTEE	37
3.1 Introduzione	37
3.2 Esercizi.....	39
CAPITOLO 4.....	51
ESERCIZI SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA	51
4.1 Introduzione	51
4.2 Esercizi.....	51
CAPITOLO 5.....	57
QUESITI DA ESAMI DI STATO	57
5.1 Introduzione	57
5.1.1 Problema 1.....	57
5.1.2 Problema 2.....	58
5.1.3 Problema 3.....	59
5.1.4 Problema 4.....	64
5.1.5 Problema 5.....	69
5.1.6 Problema 6.....	73

5.1.7	Problema 7.....	77
5.1.8	Problema 8.....	82
5.1.9	Problema 9.....	86
5.1.10	Problema 10.....	90
5.1.11	Problema 11.....	94
5.1.12	Problema 12.....	98
5.1.13	Problema 13.....	105
5.1.14	Problema 14.....	110
5.1.15	Problema 15.....	116
5.1.16	Problema 16.....	122
5.1.17	Problema 17.....	126
5.1.18	Problema 18.....	132
5.1.19	Problema 19.....	136
5.1.20	Problema 20.....	142
5.1.21	Problema 21.....	148
5.1.22	Problema 22.....	153
CAPITOLO 6.....		159
APPLICAZIONE DELL'ANALISI MATEMATICA ALL'INFORMATICA CON PYTHON		159
6.1	Introduzione	159
6.2	Fondamenti di Python per l'Analisi Matematica	160
6.3	Librerie matematiche	168
6.4	Programmazione avanzata	175
6.5	Calcolo numerico con NumPy	182
6.6	Algebra lineare	190
6.7	Analisi numerica.....	197
6.8	Calcolo simbolico con SymPy	204
6.9	Calcolo differenziale.....	211
6.10	Calcolo integrale.....	218

6.11	Serie e successioni	223
6.12	Implementazioni numeriche.....	231
6.13	Applicazioni avanzate.....	239
CAPITOLO 7		249
APPLICAZIONI IN INFORMATICA DEGLI INSIEMI NUMERICI.....		249
7.1	Applicazione 1. Congruenza Modulare in Sistemi di Hashing Distribuiti	249
7.2	Applicazione 2. Crivello di Eratostene e Generazione di Numeri Primi per RSA	250
7.3	Applicazione 3. Inverso Modulare con Algoritmo Esteso di Euclide	251
7.4	Applicazione 4. Teorema di Densità dei Razionali	253
7.5	Applicazione 5. Irrazionale Moltiplicato per Razionale Negativo	254
7.6	Applicazione 6. Teorema della Chiusura della Moltiplicazione tra Numeri Razionali.....	255
7.7	Applicazione 7. Teorema di Esistenza dei Numeri Reali – Rendering Grafico di Scene 3D	256
7.8	Applicazione 8. Teorema di Complessità Logaritmica nella Ricerca Binaria.....	258
7.9	Applicazione 9. Regola aurea in generazione di spirali.....	259
7.10	Applicazione 10. Teorema del Valore Intermedio nel Monitoraggio Termico di Batterie Smartphone.....	260
7.11	Applicazione 11: Calcolo dell'esponenziazione modulare (modular exponentiation).....	262
7.12	Applicazione 12: Calcolo del prefisso più lungo che è anche suffisso (LPS – Longest Prefix which is also Suffix).....	264
7.13	Applicazione 13: Verifica della connettività in un grafo con DFS (Depth-First Search).....	265
7.14	Applicazione 14: Parsing di espressioni con alberi binari (costruzione da notazione postfissa).....	266
7.15	Applicazione 15: Propagazione in avanti in reti neurali feedforward (forward pass).....	268

7.16	Applicazione 16: Coordinamento in sistemi distribuiti con algoritmo di elezione (Bully Algorithm).....	269
7.17	Applicazione 17: Costruzione di un heap binario tramite inserzioni successive...	270
7.18	Applicazione 18: Compressione dati con l'algoritmo di Huffman (costruzione dell'albero)	271
7.19	Applicazione 19: Riconoscimento di pattern tramite automi finiti deterministici (DFA).....	273
7.20	Applicazione 20: Calcolo incrementale del checksum CRC in trasmissioni di rete.....	274
APPLICAZIONI IN INFORMATICA DEI NUMERI COMPLESSI.....		275
7.21	Applicazione 21: Simulazione di circuiti elettrici in AC con numeri complessi...	275
7.22	Applicazione 22: Generazione di frattali di Mandelbrot con numeri complessi ...	277
7.23	Applicazione 23: Analisi del traffico cifrato con trasformata di Hilbert su segnali complessi.....	278
7.24	Applicazione 24: Reti neurali a valori complessi (CVNN) per apprendimento di segnali multicanale.....	280
7.25	Applicazione 25: Rappresentazione semantica con embedding complessi in linguistica computazionale.....	281
7.26	Applicazione 26: Ottimizzazione simbolica di espressioni complesse nei compilatori scientifici.....	282
7.27	Applicazione 27: Rappresentazione di traiettorie e rotazioni in robotica planare con numeri complessi.....	283
7.28	Applicazione 28: Simulazione di reti neurali quantistiche (QNN) con ampiezze complesse	285
7.29	Applicazione 29: Analisi di pattern nelle transazioni blockchain con trasformate complesse	286
7.30	Applicazione 30: Trasformazioni dinamiche in ambienti AR/VR con numeri complessi.....	288
APPLICAZIONI IN INFORMATICA DEI LIMITI.....		289
7.31	Applicazione 31: Definizione del limite infinito	289

7.32	Applicazione 32: Teorema della continuità uniforme	290
7.33	Applicazione 33. Teorema di unicità del limite per funzioni continue.....	291
7.34	Applicazione 34: Teorema del confronto	292
7.35	Applicazione 35: Definizione del limite per successioni.....	292
7.36	Applicazione 36: Limite di una somma	293
7.37	Applicazione 37. Limite del prodotto	294
7.38	Applicazione 38: Limite di una funzione composta	295
7.39	Applicazione 39. Teorema della permanenza del segno.....	296
7.40	Applicazione 40. Continuità uniforme nei sistemi di rendering grafico.....	297
APPLICAZIONI IN INFORMATICA DELLE FUNZIONI CONTINUE.....		299
7.41	Applicazione 41. Controllo di Continuità di una Funzione in un Punto in uno Stream Digitale	299
7.42	Applicazione 42. Discontinuità Eliminabile nei Sistemi di Crittografia Modulari.....	300
7.43	Applicazione 43. Discontinuità di Salto nei Sistemi di Query su Database	301
7.44	Applicazione 44. Continuità di Funzioni per Ottimizzazione in AI	302
7.45	Applicazione 45. Rilevamento di Errori in Sensori nei Sistemi IoT	303
7.46	Applicazione 46. Riconoscimento di Discontinuità nei Segnali in un Attacco Cyber.....	305
7.47	Applicazione 47. Interpolazione di Funzioni per Grafica.....	306
7.48	Applicazione 48. Analisi di Immagini tramite Filtro Gaussiano Continuo	308
7.49	Applicazione 49. Modellazione di Dati Sensibili in Segnali Radar.....	309
7.50	Applicazione 50. Generazione di Suoni Digitali con Continuità.....	310
APPLICAZIONI IN INFORMATICA DELLA DERIVATA E DEL CALCOLO DIFFERENZIALE.....		313
7.51	Applicazione 51. Derivate per l'Ottimizzazione in Machine Learning	313
7.52	Applicazione 52. Calcolo Differenziale per Analisi di Curve nei Sistemi di Intrusion Detection (IDS)	314
7.53	Applicazione 53. Teorema di Fermat per Ottimizzazione Automatica in Compilatori JIT.....	316

7.54	Applicazione 54. Massimo Relativo per Ottimizzazione del Throughput in Sistemi Cloud Autoscalabili.....	317
7.55	Applicazione 55. Minimo Relativo per Ottimizzazione del Consumo Energetico in Sistemi Embedded.....	319
7.56	Applicazione 56. Ottimizzazione delle Funzioni Costo con Flesso nei Modelli di Machine Learning	320
7.57	Applicazione 57. Il Teorema di Rolle per la Validazione della Continuità di Segnali Digitali.....	322
7.58	Applicazione 58. Teorema di Lagrange per Analisi di Anomalie nei Log di Accesso a Sistemi	324
7.59	Applicazione 59. Teorema di Cauchy per il Monitoraggio Comparativo di Carico su Nodi Distribuiti	325
7.60	Applicazione 60. Punti Angolosi e Cuspidi nel Rilevamento di Bordi in Immagini Digitali.....	327
APPLICAZIONI IN INFORMATICA DEL CALCOLO INTEGRALE		329
7.61	Applicazione 61. Calcolo del Carico di Rete tramite Integrazione del Traffico ...	329
7.62	Applicazione 62. Calcolo del Lavoro Computazionale Totale su Cluster di Server (Teorema di Cavalieri)	330
7.63	Applicazione 63. Calcolo del Consumo Energetico Medio di un Server (Teorema della Media Integrale)	332
7.64	Applicazione 64. Compressione del Traffico Dati in Rete tramite Calcolo Integrale.....	334
7.65	Applicazione 65. Ottimizzazione del Tempo di Esecuzione di Query in Database (Teorema della Media Integrale).....	335
7.66	Applicazione 66. Previsione del Carico di Lavoro in un Sistema di Cybersecurity (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale).....	336
7.67	Applicazione 67. Calcolo dell'Energia Visiva Totale in una Sequenza di Immagini (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale).....	338
7.68	Applicazione 68. Calcolo del Volume Cumulativo di Transazioni in una Rete Blockchain (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale).....	340

7.69	Applicazione 69. Calcolo dell'entropia cumulativa in un flusso di dati variabile .	341
7.70	Applicazione 70. Stima dell'importanza di una feature in AI in un modello di regressione tramite Integrazione	343
APPLICAZIONI IN INFORMATICA DELLE SUCCESSIONI E SERIE NUMERICHE		345
7.71	Applicazione 71. Convergenza di una Successione nel Calcolo Iterativo dell'Illuminazione in Computer Graphics.....	345
7.72	Applicazione 72. Convergenza di una Serie Geometrica in Algoritmi di Compressione (JPEG)	346
7.73	Applicazione 73. Verifica della Convergenza di Serie di Pesì Regularizzati in Reti Neurali (Criterio della Radice di Cauchy).....	348
7.74	Applicazione 74. Verifica della Convergenza nella Compressione Audio via Serie di Coefficienti Spettrali (Criterio del Rapporto di D'Alembert).....	350
7.75	Applicazione 75. Verifica della Convergenza Assoluta nella Ricostruzione di Immagini tramite Serie di Fourier.....	351
7.76	Applicazione 76. Serie di Taylor per il Calcolo del Seno nei Motori di Gioco 3D (Computer Graphics).....	353
7.77	Applicazione 77. Analisi della Convergenza di Kernel Alternanti in Filtri di Edge Detection (Criterio di Leibniz).....	354
7.78	Applicazione 78. Modellazione della Congestione in Reti di Comunicazione (Serie Armonica).....	356
7.79	Applicazione 79. Controllo della Somma degli Errori Residui in Algoritmi di Apprendimento Iterativo (Criterio del Confronto per Serie)	358
7.80	Applicazione 80. Compressione Differenziale in Database Time-Series con Serie Telescopica.....	359

Prefazione

Questo volume nasce con l'obiettivo di offrire una trattazione rigorosa, ma al tempo stesso accessibile di alcuni temi fondamentali della matematica di base, con particolare attenzione al calcolo combinatorio e al principio di induzione, strumenti essenziali tanto per gli studi universitari quanto per la preparazione degli studenti di istruzione secondaria superiore, in particolare a coloro che frequentano i licei scientifici e si preparano alle prove scritte ed orali dell'Esame di Stato, nonché alle prove di accesso alle facoltà tecnico-scientifiche.

Nel testo, ai concetti teorici si affiancano numerosi esempi e problemi selezionati per illustrare le tecniche di ragionamento tipiche della matematica. Una particolare attenzione è dedicata ai quesiti tratti dalle prove della Scuola Normale Superiore e dagli Esami di Stato dei licei scientifici, scelti per mostrare come gli argomenti trattati possano essere applicati in contesti con differenti livelli di complessità. Questi esercizi rappresentano un banco di prova significativo sia per lo studente universitario, che desidera consolidare le proprie competenze, sia per lo studente delle scuole superiori che mira ad un approfondimento oltre il programma curricolare.

Accanto agli aspetti teorici, il volume pone inoltre attenzione al rapporto tra matematica e programmazione, proponendo esempi di applicazioni dell'analisi matematica nel linguaggio Python. Tale integrazione risponde all'esigenza sempre più attuale, di mostrare come concetti matematici possano essere tradotti in algoritmi e strumenti computazionali. L'obiettivo è evidenziare come la matematica continui a costituire il nucleo teorico su cui poggiano numerose tecniche informatiche moderne.

Il testo si propone dunque come una guida che possa accompagnare il lettore lungo un percorso unitario, offrendo un quadro coerente e motivato dei concetti affrontati. L'auspicio è che esso possa essere utile sia per chi muove i primi passi nello studio universitario, sia per gli studenti più giovani, favorendo un approccio consapevole allo studio della matematica e delle sue applicazioni informatiche.

Capitolo 1

Calcolo combinatorio

1.1. Introduzione

Il calcolo combinatorio si propone la ricerca dei possibili raggruppamenti che si possono ottenere con un determinato numero di oggetti. Prima di definire le disposizioni, le combinazioni e le permutazioni, enunciamo alcuni principi la cui dimostrazione intuitiva, anche se poco formale, è molto semplice ragionando con i diagrammi di Eulero-Venn. Inoltre, attraverso alcuni esempi vediamo come si applicano

Principio di inclusione-esclusione – Siano A e B insiemi finiti. Allora,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Quanti sono i numeri naturali minori di 31 divisibili per 2 o per 3? Chiamiamo A l'insieme dei divisibili per 2 e B l'insieme dei divisibili per 3. Si ha che $|A| = 15, |B| = 10, |A \cap B| = 5$. Per il principio di inclusione-esclusione,

$$|A \cup B| = 15 + 10 - 5 = 20.$$

Quanti sono i numeri naturali minori di 31 divisibili per uno ed uno solo tra 2 e 3? Noi vogliamo gli elementi che stanno in uno solo dei due insiemi. Quindi partendo da $|A| + |B|$ bisogna sottrarre due volte l'intersezione perché gli elementi di $A \cap B$ nella somma precedente compaiono 2 volte, sia tra gli elementi di A che tra gli elementi di B . Pertanto, la soluzione è data da

$$15 + 10 - 10 = 15.$$

Principio di moltiplicazione – Siano A e B insiemi finiti. Allora,

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

In una scuola di ballo ci sono dodici donne e sette uomini. Quante possibili coppie si possono formare?

$$12 \cdot 7 = 84.$$

Un ragazzo ha 3 pantaloni e 5 magliette. In quanti modi diversi può vestirsi?

$$3 \cdot 5 = 15.$$

Principio di inclusione-esclusione in forma generale – Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ una famiglia finita di insiemi finiti. Allora,

$$\begin{aligned} |\cup_{i=1}^n A_i| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Quanti sono i numeri interi positivi minori o uguali di 1000 che sono divisibili per almeno uno tra 15, 20 e 25? Detto A l'insieme dei numeri da 1 a 1000 divisibili per 15, si ha $|A| = 66$. Indicando con B l'insieme dei numeri da 1 a 1000 divisibili per 20, si ha $|B| = 50$. Detto C l'insieme dei numeri da 1 a 1000 divisibili per 25, si ha $|C| = 40$. Inoltre,

$$|A \cap B| = 16, |A \cap C| = 13, |B \cap C| = 10, |A \cap B \cap C| = 3.$$

Pertanto,

$$66 + 50 + 40 - 16 - 13 - 10 + 3 = 120.$$

Quanti sono i numeri interi positivi minori o uguali di 400 che sono divisibili per uno ed uno solo tra 10, 12 e 15? Detto A l'insieme dei numeri da 1 a 400 divisibili per 10, si ha $|A| = 40$. Indicando con B l'insieme dei numeri da 1 a 400 divisibili per 12, si ha $|B| = 33$. Detto C l'insieme dei numeri da 1 a 400 divisibili per 15, si ha $|C| = 26$. Inoltre,

$$|A \cap B| = 6, |A \cap C| = 13, |B \cap C| = 6, |A \cap B \cap C| = 6.$$

Applichiamo una variante del principio di inclusione-esclusione. Noi vogliamo gli elementi che stanno in uno dei 3 insiemi e in nessuno degli altri 2. Quindi partendo da $|A| + |B| + |C|$, bisogna eliminare gli elementi nelle intersezioni di due di questi insiemi. Per fare ciò, ciascuna intersezione va sottratta due volte perché, ad esempio, gli elementi di $A \cap B$ nella somma precedente compaiono due volte, sia tra gli elementi di A che tra gli elementi di B . Così arriviamo a

$$|A| + |B| + |C| - 2|A \cap B| - 2|A \cap C| - 2|B \cap C|.$$

Questo non è ancora il risultato corretto perché gli elementi di $A \cap B \cap C$ sono stati inseriti all'inizio 3 volte (in A , in B e in C), e poi sottratti 6 volte (infatti compaiono 2 volte in ciascuna delle 3 intersezioni di 2 insiemi). Quindi per pareggiare il bilancio bisogna aggiungerli altre 3 volte.

$$40 + 33 + 26 - 12 - 26 - 12 + 18 = 67.$$

- Al termine del primo semestre del primo anno, la situazione degli studenti immatricolati al corso di laurea in Informatica nell'anno accademico 2024/25 è la seguente: 141 studenti hanno superato Matematica Discreta, 130 l'esame di Programmazione, 156 l'esame di Architettura, 28 hanno superato tutti e tre gli

esami, 65 hanno superato Matematica Discreta e Programmazione, 77 Matematica Discreta e Architettura, 52 Programmazione e Architettura. Infine, 139 studenti non hanno superato nessun esame. Quanti sono gli immatricolati?

Applicando il principio di inclusione-esclusione, si ha

$$141 + 130 + 156 - 65 - 77 - 52 + 28 = 261.$$

A questi dobbiamo aggiungere gli studenti che non hanno superato nessun esame e, quindi, gli immatricolati sono

$$261 + 139 = 400.$$

Principio di moltiplicazione in forma generale – Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ una famiglia finita di insiemi finiti. Allora,

$$|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

In tre classi ci sono rispettivamente 11, 15 e 20 alunni. Bisogna mandare una rappresentanza formata da un alunno di ciascuna classe. Quante terne di studenti si possono formare?

$$11 \cdot 15 \cdot 20 = 3300.$$

- Quante sono le sigle di tre caratteri che possiamo scrivere utilizzando per il primo posto i simboli Δ e ∇ , le cifre 1,2,3 per il secondo ed i simboli $\otimes, \oplus$ per il terzo?

$$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12.$$

Siano A e B due insiemi finiti con $|A| = m$ e $|B| = n$. Allora $|\wp(A \times B)| = 2^{m \cdot n}$. Pertanto, il numero di corrispondenze tra A e B è pari a $2^{m \cdot n}$. Indichiamo con B^A l'insieme delle applicazioni $f: A \rightarrow B$. Sicuramente $|B^A| < 2^{m \cdot n}$. Poiché, $\forall a \in A$ l'immagine $f(a)$ può essere scelta in n modi diversi, per ogni $a_1, a_2, \dots, a_m$ in A ci sono n valori del suo corrispondente in B . Quindi si hanno $n \cdot n \cdot n \dots$ (con m fattori). Pertanto, avremo n^m funzioni.

Principio dei cassetti - Dati n oggetti e k cassetti con $n > k$, allora almeno un cassetto deve contenere più di un oggetto. Precisamente, deve contenere almeno $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ oggetti, ove il simbolo $\lceil x \rceil$ indica la parte intera superiore di x .

Si stima che l'area della testa umana che può avere capelli è di 775 cm^2 e che ogni cm^2 contiene al massimo 165 capelli. Dimostriamo che a Roma che ha 2.788.000 di abitanti ci sono almeno 22 persone che hanno lo stesso numero di capelli. Il numero massimo possibile di capelli è $165 \cdot 775 = 127.875$. Consideriamo 127.876 cassette numerate ed in ognuno di essi mettiamo il documento di un abitante che ha il numero di capelli uguale al numero

del cassetto. Il cassetto 0 vuol dire totalmente calvo. Poiché $\left\lfloor \frac{2.788.000}{127.876} \right\rfloor = 22$, il principio dei cassetti ci garantisce quanto detto.

Supponendo che l'amicizia sia sempre reciproca, dimostriamo che ad una festa ci sono sempre due persone che hanno lo stesso numero di amici. Sia n il numero di persone presenti ad una festa. Ognuno di essi può avere da 0 ad $n - 1$ amici. Consideriamo n scatole contrassegnate con $0, 1, 2, \dots, n - 1$ ed all'interno della k -esima scatola mettiamo un foglio con il nome di chi ha k amici. Se in ogni cassetto ci fosse un solo foglio, tutte le persone avrebbero un numero diverso di amici. Quindi ce ne sarebbe una con 0 amici e un'altra con $n - 1$ amici, il che è impossibile in quanto quest'ultima è amica di tutti (compreso di colui che ha 0 amici).

Ad un appello d'esame ci sono 60 studenti. Dimostriamo che almeno tre studenti hanno il cognome che inizia con la stessa lettera dell'alfabeto inglese. Consideriamo 26 scatole contrassegnate con una delle lettere dell'alfabeto ed in ognuna di esse si pone un biglietto con il cognome di ogni studente iniziante con la lettera che contrassegna la scatola. Poiché $\left\lfloor \frac{60}{26} \right\rfloor = 3$, il principio dei cassetti ci garantisce quanto detto.

1.2. Disposizioni

Consideriamo n elementi distinti ed un numero $k \leq n$.

Definizione 1.1 – Si chiamano **disposizioni semplici** di classe k , tutti i gruppi che si ottengono con k elementi ciascuno in modo che ogni gruppo si differenzi dagli altri o per qualche elemento o per l'ordine con cui sono disposti.

Questo numero lo si indica con $D_{n,k}$ e si legge *disposizioni di n oggetti k a k* . Si dimostra che

$$D_{n,k} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

Esempi

Consideriamo la parola ALFREDO. Quante sono le parole, anche prive di significato, che si possono ottenere usando 4 diverse lettere che compongono il nome? Ogni parola si

differenzia da un'altra se cambia almeno una lettera oppure se cambia l'ordine. Pertanto, è una disposizione semplice di 7 oggetti a gruppi di 4. Si ha

$$D_{7;4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{7!}{3!} = 840.$$

In quanti modi diversi possono essere sistemati su una libreria 7 libri scelti tra 20 libri?

$$D_{20;7} = \frac{20!}{13!} = 390700800.$$

In una gara di corsa gli scommettitori devono indovinare gli atleti che arriveranno al 1°, 2° e 3° posto. Supponendo che gli atleti siano 10, quanti sono i possibili ordini d'arrivo nelle prime tre posizioni?

$$D_{10;3} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Quanti sono i numeri di tre cifre tutte diverse tra loro usando solo i numeri 2,4,6,8? Abbiamo una disposizione semplice e, quindi, si ha

$$D_{4;3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{4!}{1!} = 24.$$

Dobbiamo creare una password di cinque termini in modo che i primi due posti siano occupati da due differenti cifre e gli altri tre posti da lettere differenti dell'alfabeto italiano. Quante sono le possibili password? Per i primi due posti abbiamo $D_{10;2}$ e per gli ultimi tre $D_{21;3}$. Pertanto, si ha

$$D_{10;2} \cdot D_{21;3} = 90 \cdot 7980 = 718.200.$$

Quanti numeri di tre cifre tutte diverse si possono formare con le dieci cifre decimali? Calcolando $D_{10;3} = 720$, noi contiamo anche i numeri che cominciano con 0 che, pertanto, sono numeri di due cifre. Quindi, consideriamo le nove cifre diverse da zero e calcoliamo le loro disposizioni semplici $D_{9;2} = 72$. Ponendo lo zero davanti a tutti questi numeri, otteniamo quelli da eliminare. La risposta alla nostra domanda è $720 - 72 = 648$.

Osserviamo che, se $|A| = k$ e $|B| = n$, il numero di funzioni iniettive da A in B è zero se $n < k$ mentre è pari a $D_{n;k}$ se $n \geq k$.

Se $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{a,b,c,d,e,f\}$, quante sono le funzioni iniettive da A in B ?

$$D_{6;4} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 360.$$

Quante sono le funzioni non iniettive da A in B ?

Il numero di funzioni da A in B è $6^4 = 1296$. Pertanto, il numero di funzioni non iniettive è $1296 - 360 = 936$.

Definizione 1.2 – Si dicono **disposizioni con ripetizione** di n elementi di classe k , tutti i gruppi che si possono formare con gli elementi dati in modo che ogni gruppo ne contenga k ma ogni elemento può essere ripetuto fino a k volte.

Questo numero lo si indica $D_{n;k}^R$ e si dimostra che

$$D_{n;k}^R = n^k.$$

Quanti sono i numeri di tre cifre usando solo i numeri 2,4,6,8? Abbiamo una disposizione con ripetizione e, quindi, si ha

$$D_{4;3}^R = 4^3 = 64.$$

Una persona deve pernottare 3 notti a Roma e ci sono 10 alberghi liberi. In quanti modi può decidere di pernottare? Poiché può decidere di pernottare in alberghi diversi o anche nello stesso albergo, abbiamo

$$D_{10;3}^R = 10^3 = 1000.$$

Dobbiamo creare una password di cinque termini in modo che i primi due posti siano occupati da due cifre e gli altri tre posti da lettere dell'alfabeto italiano. Quante sono le possibili password? Per i primi due posti abbiamo $D_{10;2}^R$ e per gli ultimi tre $D_{21;3}^R$. Pertanto, si ha

$$100 \cdot 9261 = 926100.$$

1.3. Permutazioni

Consideriamo n elementi distinti.