

MATEMATICHE COMPLEMENTARI

FONDAMENTI, STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Direttore

Emilia FLORIO

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università della Calabria

Direttore onorario

Luigi MAIERÙ

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università della Calabria

Comitato scientifico

Aldo BRIGAGLIA

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Palermo

Giuseppe CANEPA

Società Italiana di Storia delle Matematiche
Università degli Studi di Torino

Bruno D'AMORE

NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica)
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Luca DELL'AGLIO

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università della Calabria

Martha Isabel FANDIÑO PINILLA

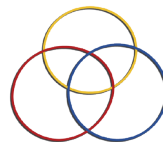
NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica)
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Massimo GALUZZI †

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Milano

MATEMATICHE COMPLEMENTARI

FONDAMENTI, STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA



La matematica altri non è che il lato esatto del nostro pensiero.

Luitzen Egbertus Jan BROUWER

La collana è dedicata a studi e ricerche sui Fondamenti, sulla Storia e sulla Didattica della Matematica, dando rilievo agli aspetti culturali di questa disciplina, cogliendone le variegata espressioni e approfondendo la sua incidenza nella formazione umana e disciplinare. La collana, perciò, accoglie:

- studi sui Fondamenti della Matematica e la loro storia;
- ricerche di Storia della Matematica (sviluppo storico di idee e metodi, corrispondenze tra matematici, edizioni critiche di manoscritti, ecc. . .);
- proposte di percorsi dai contenuti storici a una loro riproposizione didattica;
- scritti di divulgazione dei contenuti matematici e della loro incidenza nello sviluppo di altre scienze;
- riflessioni sugli aspetti generali della Didattica della Matematica (dall'antropologia alle scienze psico-pedagogiche e alle neuroscienze);
- proposte di Didattica della Matematica relative a modalità differenti di attività didattiche in una classe di alunni;
- proposte di Didattica della Matematica con l'uso costante di nuove tecnologie.

Per l'eventuale inserimento in collana, ogni opera viene sottoposta alla valutazione del Comitato Scientifico e di esperti del settore, qualora necessario.

Classificazione Decimale Dewey

— 510.92 (23.) MATEMATICA. Persone

Thema

— Soggetto: PBX. Storia della matematica

— Qualificatori: 3MN. XIX secolo, 1800–1899

MARIA ROSARIA ENEA
RICCARDO ROSSO

FELIX KLEIN TRA GALOIS E RIEMANN

LE LEZIONI A MONACO DEL 1878–79
REDATTE DA GREGORIO RICCI-CURBASTRO





ISBN
979-12-218-2499-5

PRIMA EDIZIONE
ROMA 31 MARZO 2026

INDICE

- 9 *Introduzione*
- 27 CAPITOLO I
 Il corso del Wintersemester 1878–79
- 189 CAPITOLO II
 Il corso del Sommersemester 1879

APPENDICE

- 343 A. Riassunto lezioni mancanti
- 359 B. I seminari di Ricci–Curbastro a Monaco
- 365 *Bibliografia*

INTRODUZIONE

Felix Klein a Monaco

Klein fu chiamato nel 1874 alla Scuola Politecnica di Monaco come successore di Ludwig Otto Hesse.

In quel momento Klein, che era nato a Düsseldorf nel 1849 da un funzionario prussiano, aveva già alle spalle una notevole carriera scientifica. Si era immatricolato nel 1865, all'età di 16 anni, all'Università di Bonn per studiare matematica e scienze naturali. In matematica, i suoi principali insegnanti furono Rudolf Lipschitz e il fisico sperimentale e geometra Julius Plücker. Già nel 1866, Klein era stato nominato da Plücker assistente di fisica. Inoltre, Plücker lo aveva coinvolto nell'elaborazione della *Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*, un'opera che avrebbe influenzato profondamente l'intera carriera scientifica di Klein.

Quando Plücker morì, nel maggio 1868, solo il primo volume era stato completato e l'incarico di curare la pubblicazione della sua opera fu preso da Alfred Clebsch, professore di matematica a Giessen. Clebsch, a sua volta, affidò al ventenne Klein il compito di completarla. Conseguito nel dicembre 1868 il dottorato all'Università di Bonn, Klein seguì Clebsch che era stato chiamato all'Università di Gottinga. Clebsch, che si era formato a Königsberg presso il fisico matematico Franz Neumann e i matematici Hesse e Friedrich Richelot, non era solo un matematico estremamente versatile, capace di dare notevoli contributi soprattutto nella teoria degli invarianti e nella geometria algebrica, ma era soprattutto un importante riferimento scientifico per molti giovani matematici tedeschi.

Dall'autunno 1869, Klein trascorse due periodi di studio a Berlino e Parigi insieme al matematico norvegese Sophus Lie di cui fu amico, oltre che collega. Tra i tanti matematici che Klein ebbe modo di incontrare, ricordiamo Camille Jordan che aveva appena pubblicato il trattato di teoria dei gruppi

[JORDAN, 1870], una delle opere più citate nelle lezioni che esamineremo.

Ritornato in Germania allo scoppio della guerra franco-prussiana, nel gennaio 1871 Klein ottenne la *venia legendi* a Gottinga che gli permetteva di svolgere il ruolo di docente privato (*Privatdozent*). Oltre a numerosi importanti lavori di geometria delle linee, influenzati dall'intensa collaborazione con Clebsch e i suoi allievi, Klein pubblicò nel 1871 un articolo destinato a segnare un'epoca: *Über die sogennante Nichteuklidische Geometrie*, in cui subordinava la geometria non euclidea alla geometria proiettiva, riconducendo così la coerenza logica della geometria non euclidea a quella della geometria euclidea.

A soli 23 anni, nel semestre invernale 1872-73 Klein fu chiamato come professore ordinario di matematica all'Università di Erlangen. Dopo la morte improvvisa di Clebsch, nel novembre 1872, Klein crebbe rapidamente nel ruolo di principale matematico del gruppo di studiosi che si era creato attorno a quel maestro. Quando entrò all'Università di Erlangen, seguendo l'uso dell'epoca, presentò un testo scientifico programmatico intitolato *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, un testo che sarebbe diventato noto come *Erlanger Programm* e che contribuì in modo determinante alla sua futura fama di matematico: Klein, per contrastare le tendenze dispersive che le ricerche geometriche dell'epoca stavano sviluppando, riuscì a proporre un criterio di classificazione unificante dei vari tipi di geometria basato sullo studio delle proprietà che restano invariate sotto l'azione di un gruppo di trasformazioni.

Anche se le attività scientifiche, didattiche ed organizzative di Klein proseguivano con successo, le condizioni di lavoro a Erlangen erano sempre state modeste e nelle sue lezioni egli non aveva mai avuto più di dieci uditori.

Klein accettò quindi di buon grado la chiamata alla Scuola Politecnica di Monaco, a metà novembre 1874, avendo davanti agli occhi - come egli stesso scrisse in seguito - l'ideale delle Scuole Politecniche di Parigi e Zurigo, con la loro combinazione di formazione tecnico-pratica e alta formazione teorico-scientifica in matematica e scienze naturali. Rispetto a quasi tutte le altre scuole politecniche tedesche, quella di Monaco forniva anche la possibilità di formare i candidati all'insegnamento di matematica e fisica.

Al suo arrivo a Monaco nel dicembre 1874, Klein fu subito coinvolto nelle consultazioni per l'assegnazione di una nuova cattedra di matematica presso la stessa scuola e riuscì a ottenere la chiamata di un allievo di Clebsch, Alexander Brill, la cui candidatura era stata appoggiata anche da Paul Gordan, un altro dei matematici che avevano gravitato attorno a Clebsch. Gordan era

entrato con Klein nella redazione dei *Mathematische Annalen* nel 1872 e, su iniziativa di Klein, era stato chiamato all'Università di Erlangen nel 1874. Klein e Brill si dedicarono con grande energia a riorganizzare e rivitalizzare l'insegnamento della matematica a Monaco: fondarono un Istituto matematico, realizzarono una completa riforma dell'insegnamento matematico per gli studenti di ingegneria e ravvivarono l'insegnamento della matematica, tramite corsi specialistici rivolti agli studenti che dovevano abilitarsi all'insegnamento. Inoltre fondarono: un Circolo matematico (*Mathematisches Kraenzchen*) nel quale alcuni giovani docenti delle materie tecniche, della matematica e della fisica si riunivano periodicamente per tenere conferenze divulgative; una Società matematica (*Mathematische Gesellschaft*) nella quale i professori e i liberi docenti di matematica e di fisica matematica dell'Università e della Scuola Politecnica si incontravano regolarmente. Infine, istituirono un Seminario matematico (*Mathematisches Kolloquium*) al quale parteciparono anche gli allievi già laureati di Klein, Axel Harnack, Ferdinand Lindemann e Ludwig Wedekind che lo avevano seguito da Erlangen.

Ai corsi specialistici e alle sessioni di seminari tenuti da Klein e Brill, ben presto si iscrissero tanti studenti. I più noti tra questi furono: Franz Meyer, Karl Rohn, Ludwig Schleiermacher e Isaac Bacharach che arrivarono a Monaco nel semestre invernale 1875-76 dall'Università di Lipsia; Anton Puchta che giunse dall'Università di Praga nel semestre invernale 1876-77; il diciottenne Adolf Hurwitz e Carl Runge, proveniente da Berlino, nel semestre estivo 1877. Sempre tra il 1876 ed il 1877, cominciano a frequentare i seminari anche alcuni studenti già iscritti all'Università di Monaco come Walther Dyck, Anton von Braunmühl e Joseph Gierster.

È di questi anni, soprattutto ad opera degli studenti, la realizzazione di modelli in gesso per illustrare la teoria delle curve e delle superfici algebriche; alla realizzazione di tali modelli, accompagnati da interessanti note esplicative, contribuì l'editore Ludwig Brill, fratello maggiore di Alexander, che guidava la libreria e stamperia di famiglia a Darmstadt. Il Politecnico di Monaco destinò spazi e ingenti finanziamenti che contribuirono al successo dell'iniziativa. Questa attività di alta divulgazione ebbe forti ripercussioni sullo sviluppo istituzionale della matematica in Germania e fu un successo continentale, vista la diffusione delle collezioni di modelli in molte università e scuole tecniche superiori europee.

Per uno studio completo della figura di Klein rimandiamo al volume [TOBIES, 2021] dal quale abbiamo tratto le informazioni qui riportate.

Gregorio Ricci-Curbastro a Monaco

Il periodo al quale si riferiscono le lezioni di cui abbiamo curato l'edizione è quello dei due semestri, invernale ed estivo, del 1878-79.

Rispetto al biennio precedente, la composizione dell'uditorio era molto cambiata: Rohn e Puchta si erano trasferiti, rispettivamente, a Lipsia e a Praga, per conseguire l'abilitazione; Meyer, Runge e Hurwitz si erano spostati all'Università di Berlino per seguire le lezioni di Leopold Kronecker, Ernst Eduard Kummer e Karl Weierstrass, decisione che fu accolta con poco entusiasmo da Klein che malvolentieri vedeva allontanarsi alcuni dei suoi allievi più dotati dal punto di vista scientifico. Dei partecipanti al seminario di Klein del semestre estivo del 1877 erano rimasti solo von Braunmühl, Gierster e Dyck, che studiavano per conseguire il dottorato mentre, tra i nuovi studenti, figurava Gregorio Ricci-Curbastro.

Ricci aveva studiato dal 1869 presso le università di Roma e Bologna e infine alla Scuola Normale Superiore di Pisa, conseguendo il dottorato nel 1875.

Ricci e Luigi Bianchi, che si recò a Monaco l'anno dopo, furono i primi giovani matematici a trascorrere un periodo di perfezionamento da Klein, usufruendo di un sistema di borse ministeriali grazie al quale si creò gradualmente un nucleo di giovani studiosi che, ritornati in Italia, misero a disposizione dei propri allievi il bagaglio di conoscenze acquisito nelle sedi europee più prestigiose per la ricerca matematica. Oltre a Ricci e Bianchi vanno citati anche Salvatore Pincherle, Alfredo Capelli, Gian-Antonio Maggi e Paolo Gazzaniga che trascorsero periodi a Berlino mentre Francesco Gerbaldi, Giuseppe Veronese, Ernesto Pascal e Giacinto Morera seguirono le lezioni di Klein a Lipsia o a Gottinga.

I contatti tra matematici italiani e tedeschi non erano una novità. Infatti, dopo l'unità politica dell'Italia, le ricerche sulla teoria degli invarianti e sulla geometria algebrica avevano avvicinato studiosi come Eugenio Beltrami, Francesco Brioschi e Luigi Cremona ai matematici della scuola di Clebsch.

Klein si recò per la prima volta in Italia alla fine dell'estate del 1874 per conoscere personalmente i matematici italiani, incontrando Cremona e Beltrami. Durante il suo periodo come professore presso la Scuola Politecnica di Monaco, Klein aveva ulteriormente approfondito i contatti con l'Italia; dal 1876 esisteva un intenso rapporto di lavoro tra Klein e Brioschi riguardante le ricerche di quest'ultimo sulle equazioni di quinto grado. Brioschi visitò Klein a Monaco nell'aprile 1877. Durante un secondo viaggio in Italia, nella primavera del 1878, Klein aveva incontrato anche Enrico Betti, del quale

Ricci era stato allievo a Pisa e questo incontro ebbe probabilmente un ruolo nel convincere Ricci a recarsi a Monaco.

Questa esperienza a Monaco, oltre a non incidere direttamente sugli interessi di ricerca di Ricci, più orientati alle applicazioni alla fisica, fu irta di difficoltà dovute ad una scarsa conoscenza iniziale del tedesco ed alla necessità di colmare le mancanze nei prerequisiti. Possiamo farci un'idea precisa delle difficoltà incontrate leggendo le relazioni sulle attività svolte che Ricci, come gli altri borsisti, era tenuto ad inviare al termine di ciascun semestre al Ministero della Pubblica Istruzione e di cui riportiamo la trascrizione dell'originale, disponibile presso l'Archivio di Stato a Roma.

Relazione I Semestre

“Nella riverita Nota Ministeriale in data 9 Ottobre 1878, in cui mi veniva partecipato essermi stato conferito un assegno di L. 3000 con obbligo di portarmi all'Esterio per perfezionarmi nelle Matematiche Superiori, era pure detto essere io tenuto a inviare a codesto Ministero gli attestati di diligenza e di profitto non che due relazioni, una per semestre, intorno agli studi da me fatti nel semestre stesso.

Giunto ormai al termine del semestre d'inverno mi faccio un dovere di mandare la prima delle relazioni richieste insieme all'accluso attestato del Prof. Klein, dal quale può rivelarsi come io abbia atteso al Corso dallo stesso professato in questa R. Scuola Politecnica, Corso di cui sono state oggetto la Teoria superiore delle equazioni Algebriche e quelle parti delle Teorie dei Numeri e delle Sostituzioni, che ad essa sono strettamente legati. Queste ultime però essendo state in gran parte supposte note, o toccate soltanto di passaggio, io ho dovuto procurarmi le cognizioni che mi erano necessarie per la intelligenza del Corso del Prof. Klein e così sono stato condotto allo studio del Corso di Algebra Superiore del Serret, e specialmente del Volume Secondo che ho studiato quasi per intero. Trattenuto in questo ordine di studi sia dalle Lezioni del Prof Klein, che dalla lettura del Serret, ho creduto opportuno lo spingermi oltre nella stessa direzione ed ho intrapreso lo studio dell'Opera di Jordan intitolata “*Traité des Substitutions et des Équations Algébriques*”, di cui ho già studiato le parti relative alle congruenze, alle generalità sulle sostituzioni e al gruppo delle sostituzioni lineari. Ho pure dovuto procurarmi cognizioni nella teoria delle forme e nella Geometria Superiore. E questo ho attinto dal Corso di Geometria di Clebsch pubblicato da Lindemann.

In fine mi sono anche occupato e mi occupo tuttora di alcune questioni propostemi dal Prof. Klein, che da una parte si riannodano a quelle trattate

nelle più recenti Memorie dello stesso Professore sulle equazioni dell'Icosaedro e sulle Trasformazioni di ordine settimo, dall'altra con la Teoria delle Equazioni Differenziali Lineari, che l'addietro sono state oggetto di alcuni miei studi.

Colgo volentieri questa occasione per protestarmi di V.E.

Obbl.mo Dev.mo

Dott. Gregorio Ricci

Monaco (Baviera) 14 Marzo 1878

A S.E. Il Sig. Ministro della Pubblica Istruzione, Roma"

Non può esserci testimonianza più chiara dell'impegno che Ricci profuse per colmare le lacune della preparazione e portarsi al punto di poter trarre profitto dalle dense lezioni di Klein. Notiamo il riferimento al lavoro [RICCI-CURBASTRO, 1877] sulle equazioni differenziali il cui legame con le lezioni di Klein si riduce in sostanza al fatto che entrambi si riferiscono ai lavori di Fuchs.

Relazione II Semestre

"A sua Eccellenza il Sig.re Ministro della Pubblica Istruzione

In conformità alla riverita Nota di V.E. in data 9 Ottobre 1878, con cui mi veniva comunicato essermi stato conferito un assegno di lire 3000 coll'obbligo di perfezionarmi negli studi delle Matematiche Superiori all'Estero durante l'anno scolastico 1878-79, mi faccio un dovere di dare, come già nel semestre precedente, relazione alla E.V. degli studi da me fatti nel semestre d'estate 1879.

Persuasato e per mia propria convinzione e per consigli ricevuti specialmente dal Chiar.mo Prof. Klein di non poter meglio usufruire questo semestre che col proseguire gli studi già intrapresi nel precedente mi decisi di passarlo come questo a Monaco, dove lo stesso Klein si proponeva di svolgere nel suo Corso Speciale le teorie riguardanti le funzioni modulari e le trasformazioni ellittiche da lui pubblicate recentemente e in parte ancora in corso di pubblicazione nei *Mathematische Annalen*. Ciò aveva per me il doppio vantaggio e di presentarmi una doppia applicazione importantissima delle teorie di Galois sulle equazioni algebriche da me studiate nel semestre precedente e di sentire dalla bocca stessa del loro illustre inventore lo svolgimento di nuovi metodi che attirano in Germania e fuori l'attenzione di quanti si occupano della teoria importantissima delle funzioni ellittiche. Penetrato nello spirito di questi

metodi mi fu poi più tardi concesso di studiare dal loro punto di vista la memoria del Sig. Smith pubblicata negli Atti della R. Accademia dei Lincei dell'anno 1877, e di farne rapporto al Seminario Matematico presieduto dal prof. Klein.

Lo studio di questa Memoria, che mette in evidenza un nuovo ed importantissimo nesso tra la teoria delle trasformazioni ellittiche e quella dei numeri mi diede occasione di studiare anche quest'ultima, che mi era del tutto ignota.

Precedentemente io m'ero poi occupato dello studio della teoria delle funzioni e sulla memoria classica di Riemann sulle Funzioni Abelianie in generale e su quella di Weber riguardante il caso speciale delle funzioni, nel quale è $p = 3$.

A questi brevi cenni sugli studi, a cui ho atteso nel semestre di recente finito, unisco un attestato di diligenza e profitto, che il Chiaro Prof. Klein ha avuto la bontà di rilasciarmi.

In fine mi ascrivo ad onore di professarmi con ogni stima

Obbl.mo Dev.mo Dott. Gregorio Ricci Lugo li 10 Agosto 1879"

Questa seconda relazione menziona l'attività seminariale all'interno del *Kolloquium*. Il seminario menzionato è il secondo che Ricci tenne a Monaco ed il testo è stato riprodotto qui in appendice insieme a quello del primo seminario dedicato ad alcune proprietà gruppali delle superfici di Kummer. Interessante è la menzione alla memoria di Weber [1876] sugli integrali abeliani relativi ad una superficie di Riemann di genere 3 perché strettamente legata alle ricerche sui gruppi congruenziali relativi al caso $n = 7$ (si veda l'equazione (5) a p. xv) e che gioca un ruolo importante negli sviluppi che condussero Klein ad introdurre la curva di quart'ordine che porta il suo nome.

Resta dunque valido il giudizio dato da Levi-Civita [1925] che, commemorando Ricci all'Accademia dei Lincei, scrisse:

Se pure il KLEIN ebbe influenza benefica sullo sviluppo ulteriore del suo pensiero matematico, l'eventuale stimolo si trasfuse così nella sua personalità che non ne rimane traccia appariscente, a differenza di quanto si riscontra in altri, pur illustri, scolari dello stesso KLEIN.

Struttura del Corso

I corsi di cui presentiamo la trascrizione ed il commento furono tenuti a Monaco tra l'autunno del 1878 e l'estate del 1879 ed abbracciano non solo

il contenuto delle *Vorlesungen über das Ikosaeder*, pubblicate nel 1884 e che ritroviamo nel corso del *Wintersemester*, ma anche quello che costituirà il nucleo delle *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, pubblicate in due volumi nel 1890 e nel 1892 con la collaborazione di Robert Fricke. Basterebbe solo questa informazione per dare un'idea dell'ampiezza, della difficoltà degli argomenti trattati e degli ostacoli che Ricci dovette affrontare. Una difficoltà che risulterà ancora più chiara esaminando da vicino la struttura dei due corsi, il cui obiettivo è enunciato così da Klein all'inizio del *Tagesbuch*, la sua raccolta di appunti contenente la traccia delle lezioni:¹

Meine Aufgabe: Die *Galois'sche* Theorie zu exponiren und mit der functionentheoretischen Durchführungen möglichst weit zu gehen. Ich Hoffe die Auflösung der Gleichung 5. Grades mit brachbaren Endformeln, und ebenso die Lösung gewisser Gleichungen 7^{ten} und 8^{ten} Grades vorzutragen.

Klein vuole condurre i suoi uditori al fronte delle ricerche su cui egli si è concentrato negli ultimi anni, a partire dal periodo trascorso ad Erlangen, che hanno dato origine ad una notevole messe di articoli scientifici pubblicati o, addirittura, ancora in fase di pubblicazione, soprattutto sui *Mathematische Annalen*.

Il corso, dopo un breve *excursus* sulla storia delle equazioni algebriche, affronta argomenti “istituzionali” per un ciclo di lezioni centrate su questo tema: dall'irriducibilità delle equazioni al concetto di aggiunzione per arrivare ad illustrare le trasformazioni di Tschirnhaus. In generale, Klein segue in questa parte il *Cours d'Algèbre Supérieure* di Alfred Serret la cui seconda edizione era stata tradotta in tedesco da Gustav Wertheim nel 1868, come pure il *Traité des substitutions et des équations algébriques* che Camille Jordan aveva pubblicato nel 1870. Manca il trattato di Eugen Netto, pubblicato nel 1882, che sarà usato da Klein nelle lezioni tenute a Gottinga analizzate da Heller [2023]. Nell'esposizione Klein non perde occasione di inserire riferimenti alle superficie di Riemann che, per essere apprezzati, richiederebbero già una qualche familiarità con l'argomento. Inoltre, illustrate in generale le trasformazioni di Tschirnhaus, Klein le specializza alle equazioni di quinto grado, mostrando come arrivare per loro tramite alla forma normale di

¹Il mio compito: esporre la teoria di Galois e spingermi il più lontano possibile nella sua applicazione alla teoria delle funzioni. Spero di presentare la soluzione dell'equazione di quinto grado con formule utilizzabili così come la soluzione di alcune equazioni di settimo ed ottavo grado.

Bring-Jerrard

$$y^5 + by + c = 0.$$

È a questo punto che l'esposizione di Klein cambia registro perché inserisce una digressione sulle superfici diagonale e principale in coordinate pentaedriche, un concetto fondamentale per la trattazione geometrica dell'equazione di quinto grado, come evidenziato da Clebsch, ma che in questo momento crea una brusca accelerazione che rende difficile seguire il corso. Stessa osservazione si può fare per i riferimenti ai risultati che Klein e Dyck stavano ottenendo nello studio delle superficie di Riemann regolari che non potevano essere familiari se non agli studenti del circolo che gravitava intorno a Klein e certamente non lo erano per Ricci. In questa parte del corso, che abbraccia gli articoli 15-20, Klein abbandona l'aspetto istituzionale proprio delle prime lezioni e procede ad "inondare" l'uditorio con temi e risultati che saranno sviluppati in entrambi i corsi: dal gruppo di 168 elementi alla quartica di Klein, dalle curve aggiunte alle funzioni ellittiche: certamente una motivazione che può galvanizzare chi, interessato a questo genere di ricerche, ne può intuire la sconfinata ricchezza ma che lascia chiaramente intendere come dal corso non ci si può aspettare, o almeno non sempre, una introduzione graduale alle difficoltà da superare e che ben si accorda con quanto scritto da Constance Reid [1970, pp. 48-49]:

It was Klein's theory that students should work out proofs for themselves. He gave them only a general sketch of the method. The result was that a student had to spend at least four hours outside class for every hour spent in class if he wished to master the material. Klein's forte was the comprehensive view.

Conclusa questa *Overture* in cui Klein, come un compositore, ha sviluppato i vari temi che costuiranno la trama della sinfonia che ci si accinge a far ascoltare, c'è un ritorno agli argomenti istituzionali delle risolventi di Lagrange e Galois che mettono in evidenza i gruppi finiti di sostituzioni e le funzioni che restano invariate sotto la loro azione. Anche qui Klein non perde occasione per dare una veste geometrica a concetti algebrici, coerentemente con il suo "programma di Erlangen" e ciò emerge in particolare dopo l'esauriente esposizione delle espressioni analitiche delle sostituzioni, ottenute con il ricorso ai metodi di teoria dei numeri introdotti da Hermite. Particolare attenzione è prestata al sottogruppo di 168 elementi del gruppo simmetrico S_7 individuato da Kronecker e nel quale Klein osserva la presenza di un ulteriore

sottogruppo di 24 sostituzioni che è messo in corrispondenza biunivoca con le rotazioni che mandano un cubo in sé. Simili osservazioni sono fatte anche per il sottogruppo di 660 elementi inserito in S_{11} e del quale Klein analizza un sottogruppo isomorfo alle trasformazioni che mandano un icosaedro in sé.

Con l'obiettivo di studiare le equazioni modulari, a partire dall'art. 37, Klein esamina la rappresentazione dei gruppi di permutazioni S_p , con p primo, tramite funzioni lineari fratte

$$N \mapsto N' \equiv \frac{\alpha N + \beta}{\gamma N + \delta} \pmod{p} \quad (1)$$

dove i coefficienti α , β , γ e δ sono interi modulo p mentre N ed N' sono interpretati come indici di $p + 1$ lettere $x_\infty, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$.

Anche sulla scorta del *Traité* di Serret e del lavoro di Betti [1853], Klein studia la struttura di questi gruppi che sarà ripresa nella seconda parte del corso quando introdurrà i *gruppi congruenziali* che agiscono sulla rete modulare nel semipiano complesso superiore. Terminato l'esame della teoria dei gruppi con uno studio dei sottogruppi distinti (cioè normali) di un gruppo dato, a partire dall'art. 44 Klein ne analizza il legame con le equazioni algebriche entrando nel vivo della teoria di Galois. Come esempi, Klein illustra le equazioni ciclotomiche che costituiscono il prototipo di equazioni le cui radici sono tutte funzioni razionali di una di esse. Questa proprietà è condivisa dall'equazione dell'icosaedro a cui Klein ritorna a partire dall'art. 53 e che è scritta nella forma

$$1728 \frac{H^3}{f^5} = r \quad (2)$$

dove f è una forma binaria le cui radici rappresentano i vertici di un icosaedro ed H è la forma hessiana di f , mentre r è un parametro i cui valori più importanti sono ∞ , 0 ed 1, in corrispondenza dei quali le soluzioni dell'equazione rappresentano i vertici dell'icosaedro e le proiezioni centrali dei punti di mezzo degli spigoli e dei centri delle facce sulla superficie della sfera circoscritta. L'equazione è di grado 60 e Klein vuole determinarne le risolventi, concentrandosi su quelle di quinto e sesto grado. Klein conduce questo primo studio con il metodo che ritiene "più naturale" e che poggia sulla geometria dell'icosaedro. A partire dall'art. 62 effettua una rilettura analitica dei risultati ottenuti servendosi della teoria delle forme con la quale affronta il problema di determinare i valori che può assumere l'argomento $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ di f quando siano prescritti i valori che assumono f , H ed il loro determinante

funzionale T che completa il sistema fondamentale dei covarianti di f . Questo affiancamento di metodi geometrici a metodi analitici, oltre a consentire ad uditori con sensibilità diverse di apprezzare allo stesso modo i risultati che si illustrano, è anche un confronto tra i metodi più congeniali a Klein e quelli prediletti dall'amico Paul Gordan.

Il gruppo di Galois dell'equazione dell'icosaedro è semplice e Klein, in una sorta di contrappasso, fa seguire un esame dell'equazione dell'ottaedro che ha gruppo di Galois composto. Risolvendola algebricamente egli illustra in pratica il concetto di serie di composizione introdotto da Jordan basandosi sul *Traité* soprattutto nella sezione che si apre con l'art. 68, dedicata alla risoluzione algebrica delle equazioni. La condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità algebrica di un'equazione irriducibile di grado uguale ad un numero primo è che la risolvente di Lagrange ammetta una radice razionale [BIANCHI, 1900, p. 200]. Ciò offre il destro a Klein per parlare della risolvente di Malfatti di sesto grado per le equazioni di quinto grado, che era stata tolta dall'oblio da Brioschi. Insieme a Betti è Brioschi il matematico italiano più citato nelle lezioni e proprio nel 1878, su invito di Klein, era apparso sui *Mathematische Annalen* un lungo articolo di rassegna in cui Brioschi presentava i suoi studi sulle equazioni di quinto grado.

Dopo aver trattato il teorema di Abel sull'impossibilità di risolvere algebricamente le equazioni generali di grado superiore al quarto, Klein apre una lunga parentesi dedicata alla teoria dei numeri ideali introdotti da Kummer a partire dal 1847 ed il cui ruolo nell'algebra era stato evidenziato da Kronecker che si era posto un problema di ampia portata [KRONECKER, 1853, p. 9]:

Trovare la più generale funzione algebrica di A, B, C , ecc. che soddisfi un'equazione di grado n i cui coefficienti siano funzioni razionali di A, B, C , ecc. e le cui altre radici (quando le si indichi con $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ mentre con z_0 si indica la funzione cercata) soddisfano le equazioni:

$$z_1 = \theta(z_0), \quad z_2 = \theta(z_1), \dots, z_0 = \theta(z_{n-1}),$$

dove $\theta(z)$ denota una funzione razionale sia di z che di A, B, C , ecc.

Kronecker aveva osservato un'analogia tra l'espressione della risolvente di Lagrange e certi sviluppi ottenuti da Kummer [1847] nella teoria degli ideali.

Per spiegare il succinto resoconto di Kronecker, Klein dedica molte lezioni alla teoria di Kummer. Questa lunga parte del corso è di grande interesse ma costituisce una digressione che allontana dai temi portanti trattati nei due semestri. Per questo abbiamo deciso di ometterla da questa edizione, riservandole una pubblicazione a parte.

Chiusa la parentesi dedicata alla teoria dei numeri, Klein riprende lo studio delle equazioni di quinto grado, esponendo le idee alla base dei lavori che aveva pubblicato da poco, soprattutto delle *Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder*, apparse nel 1877 sugli *Annalen*. Il primo importante risultato esposto da Klein è la dimostrazione del teorema, enunciato da Kronecker, sull'impossibilità generale di trasformare la generica equazione di quinto grado nella forma di Bring-Jerrard, contenente un solo parametro, senza ricorrere ad irrazionalità ausiliarie. Klein aveva dimostrato il teorema nel suo [1877c] e lo riproporrà in conclusione del volume [KLEIN, 1884], pur con qualche mancanza tecnica che sarà colmata in seguito [SHURMAN, 1997, p. 135]. Klein espone quindi un metodo geometrico di interpretare le radici di un'equazione di quinto grado, ridotta alla forma di Bring-Jerrard, come coordinate pentaedriche di un punto che giace sull'intersezione di una quadrica (la superficie principale) e di una cubica che è la superficie diagonale di Clebsch, il cui ruolo nella soluzione delle equazioni di quinto grado era stato messo in luce da Clebsch [1871a]. Nel corso di queste lezioni il sottogruppo alternante A_5 delle permutazioni pari di S_5 è rappresentato da 60 *collineazioni*, cioè trasformazioni dello spazio proiettivo che mandano rette in rette e lasciano inalterate le superfici principale e diagonale. In particolare, si evidenziano tre famiglie di piani tangenti alla superficie principale che prendono un numero di posizioni inferiori a 60 sotto l'azione di A_5 e che giocano per questo un ruolo analogo ai punti notevoli dell'icosaedro evidenziati dai valori del parametro r in (2). Come detto, la superficie principale è una quadrica e Klein studia l'effetto delle collineazioni sulle due famiglie di generatrici che vi giacciono e che sono reali, ad esempio, nel caso dell'iperboloide ad una falda. Questo inatteso legame è forse uno dei punti più eleganti delle ricerche di Klein sulle equazioni di quinto grado e getta tra l'altro anche un ponte con i lavori del suo maestro Plücker. Una rivistazione in chiave moderna della rappresentazione geometrica del gruppo A_5 si trova in [HELLER, 2022, pp. 435-440].

È in queste lezioni, che si estendono dall'articolo 117 al 126, che Klein rende manifesta l'importanza di accostare ai concetti algebrici un'immagine geometrica che, almeno ai suoi occhi, era necessaria per aiutare con l'intuizio-