



Classificazione Decimale Dewey:

510.76 (23.) MATEMATICA. Prontuari scolastici ed esercizi

SALVATORE GRILLO

**CORSO DI
MATEMATICA GENERALE
UN VIAGGIO ATTRAVERSO
LE APPLICAZIONI DELLA MATEMATICA**

TOMO II





©

ISBN
979-12-218-2385-1

PRIMA EDIZIONE
ROMA 20 FEBBRAIO 2026

INDICE

PREFAZIONE.....	9
IL CALCOLO DEI LIMITI.....	13
Casi di discontinuità.....	14
<i>Discontinuità di prima specie.....</i>	14
<i>Discontinuità di seconda specie</i>	15
<i>Discontinuità di terza specie</i>	16
Calcolo dei limiti	18
<i>Limiti fondamentali.....</i>	19
<i>Teoremi sulla Continuità</i>	22
<i>Teoremi sui limiti</i>	35
Limiti notevoli più comuni.....	40
<i>Tabella generale dei limiti notevoli</i>	41
<i>Limiti di forma indeterminata.....</i>	42
<i>Cenni sui limiti di Funzioni di due (o più) variabili.....</i>	47
DERIVATA DI UNA FUNZIONE IN UNA VARIABILE.....	53
Derivata di una funzione	53
<i>Rapporto incrementale.....</i>	54
<i>Derivata o incremento infinitesimale.....</i>	55
Punto di accumulazione	56
Derivata di una funzione in un punto x_0	57
Derivata sinistra e destra.....	60
Derivate delle funzioni elementari.....	62
Teoremi sulle derivate.....	66
<i>Derivata del prodotto di due funzioni</i>	66
<i>Derivata della funzione reciproca.....</i>	68
<i>Derivata del quoziente di due funzioni.....</i>	69
<i>Funzioni composte</i>	70
<i>Derivata di una funzione composta.....</i>	71
<i>Derivata di una funzione inversa.....</i>	72
DERIVATE DELLE FUNZIONI DI DUE VARIABILI	75
Derivata parziale in un punto	75
INTEGRALI INDEFINITI	79
Tecniche di calcolo degli integrali indefiniti	82

<i>Metodi di integrazione per parti</i>	82
<i>Metodo di integrazione per sostituzione</i>	76
Cenni sulle equazioni differenziali.....	85
<i>Equazioni differenziali del primo ordine</i>	85
<i>Equazioni differenziali a variabili separabili.....</i>	85
LE APPLICAZIONI DELLE SUCCESSIONI AL CALCOLO	
DI AREE E PERIMETRI	91
Calcolo approssimativo di aree	91
Calcolo della lunghezza di un arco di curva continua	97
LA GEOMETRIA ANALITICA	101
Sistema di riferimento cartesiano.....	101
<i>Distanza di due punti</i>	103
<i>La Traslazione degli Assi</i>	107
Studio di Funzioni elementari	110
<i>Leggi della proporzionalità diretta.....</i>	110
<i>Significato dei coefficienti.....</i>	113
Significato di b	113
Significato di a	114
Concetto di proporzionalità lineare	114
Casi particolari	117
Rette Parallele	118
Rette Coincidenti.....	120
Rette Incidenti	121
Fascio di rette parallele.....	122
Fascio di rette passanti per un punto	123
Rette perpendicolari	125
Distanza di un punto da una retta.....	127
Equazione di una retta passante per due punti..	129
Interpolazione lineare.....	130
Problemi sulla retta	132
<i>Rappresentazione grafica della funzione $y = a/x$</i>	138
<i>La curva di equazione $y = ax + b + c/x$</i>	143
<i>La funzione di secondo grado $y = ax^2$.....</i>	153
<i>La funzione di secondo grado $y = ax^2 + bx + c$</i>	155
<i>Le funzioni $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ (con $r \in \mathbb{R}^+$).....</i>	165
<i>Equazione della circonferenza di centro generico</i>	169

<i>Ellisse come luogo geometrico.....</i>	173
<i>La curva esponenziale $y = b^x$.....</i>	182
<i>Le curve del tipo $y = cb^x$</i>	187
Il numero di Nepero	193
STUDIO GRAFICO DI FUNZIONE REALE IN UNA VARIABILE...205	
CALCOLO DEGLI INTEGRALI DEFINITI.....	219
Proprietà di linearità degli integrali definiti.....	221
Cenni sugli integrali impropri	225
ELEMENTI DI ALGEBRA LINEARE.....	227
MATRICI E DETERMINANTI	229
Definizione di matrice	230
Applicazione delle matrici.....	231
Classificazione delle matrici	233
Le operazioni con le Matrici	237
<i>Addizioni fra matrici</i>	237
<i>Sottrazione fra matrici</i>	237
<i>Proprietà dell'addizione matriciale.....</i>	238
<i>Moltiplicazione di una matrice per un numero</i>	239
<i>Moltiplicazione di matrici riga per colonna</i>	241
<i>Applicazione del prodotto di matrici.....</i>	243
<i>Proprietà della moltiplicazione fra matrici.....</i>	245
<i>Proprietà commutativa</i>	245
<i>Proprietà associativa</i>	246
<i>Proprietà distributiva.....</i>	247
Differenza fra algebra delle matrici e algebra dei numeri	247
Trasformazioni elementari sulle matrici	249
Determinante di una matrice	251
<i>Proprietà dei determinanti.....</i>	252
Rango di una matrice.....	275
<i>Calcolo della matrice inversa</i>	283
APPLICAZIONI DI MATRICI E DETERMINANTI AI SISTEMI LINEARI.....	287
Sistemi lineari in n incognite ed m equazioni.....	287
<i>Sistemi equivalenti.....</i>	289
<i>Equazioni dipendenti e indipendenti.....</i>	289
<i>Sistema impossibile.....</i>	290

<i>Matrice associata a un sistema</i>	291
Teorema di Rouché-Capelli	293
Tecniche di soluzione di un sistema.....	298
<i>Risoluzione di un sistema con il metodo di Jordan-Gauss</i>	
$-o$ <i>metodo del “Pivot”.....</i>	298
<i>Metodo Jordan-Gauss per sistemi rettangolari</i>	302
<i>Metodo Jordan-Gauss per sistemi incompatibili.....</i>	309
<i>Metodo Jordan-Gauss per sistemi rettangolari riducibili</i>	311
Sistemi omogenei.....	317
<i>Problemi di primo grado</i>	319
Risoluzione di sistemi lineari con l’uso di determinanti.....	323

PREFAZIONE

La matematica è efficace nel costruire delle rappresentazioni del mondo reale. Galileo sosteneva che la natura è scritta in linguaggio matematico. La Matematica si rileva efficace anche nelle descrizioni delle Scienze naturali, da alcuni studiosi detta “Matematica della vita”. La rivoluzione tecnologica che stiamo vivendo è l'applicazione della matematica attraverso l'informatica, nelle sue varie manifestazioni: intelligenza artificiale, scienza dei dati, matematica nelle scienze umane, ecc.

Purtroppo non vi è in Italia una buona percezione della Matematica, nonostante l'Italia abbia dato i natali ad Archimede, considerato il più grande matematico dell'era antica; a Galileo, precursore della Meccanica di Newton; a Fibonacci, che oltre alle tante opere di Algebra e Geometria, introdusse i numeri indo-arabi in Europa; a Peano, studioso di Logica, Calcolo infinitesimale e di tanto altro. Non è raro sentire qualcuno dire quasi con orgoglio: “Io di Matematica non ho mai capito niente”.

Oggi la matematica si occupa di tante cose, le ricerche proseguono anche nello studio della “Matematica astratta”, la quale si potrà rivelare proficua nelle applicazioni future. Spesso si trovano relazioni inattese fra branche della Matematica, a prima vista assai distanti fra loro, e relazioni fra Matematica e le Scienze da essa lontane. È questo è il miracolo della Matematica.

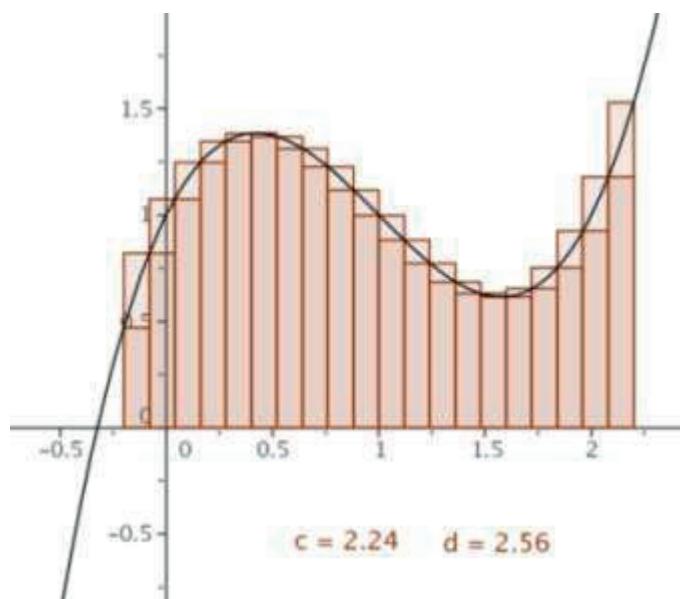
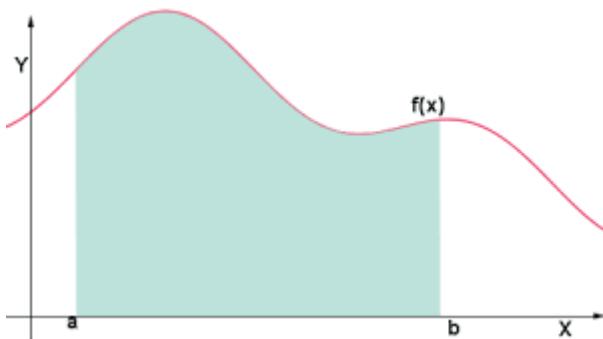
Questo testo di matematica generale copre argomenti di base dell'analisi, di geometria analitica, fornendo le fondamenta per discipline più specializzate. Ecco una suddivisione dettagliata degli argomenti:

Pri

1. Numeri e sistemi numerici: Numeri naturali, relativi, razionali, reali, complessi.
2. Insiemi: Operazioni sugli insiemi, applicazioni, relazioni binarie, strutture.

3. Logica matematica: Linguaggi proposizionali, connettivi, quantificatori, dimostrazioni formali.
4. Geometria analitica: Coordinate cartesiane, retta, iperbole, parabola, ellisse, circonferenza, funzioni esponenziali
5. Algebra lineare: Matrici e determinanti, sistemi lineari.
6. Funzioni reali di una variabile reale: Definizioni, rappresentazione geometrica, limiti, continuità, derivate, integrali.
7. Calcolo differenziale: Derivate, applicazioni.
8. Calcolo integrale: Integrale indefinito, integrale definito, significato geometrico, cenni sugli integrali impropri, Cenni sui equazioni differenziali.

Questo testo è particolarmente indicato per corsi di matematica generale per le facoltà di Economia, Biologia, Scienze, Ingegneria.



IL CALCOLO DEI LIMITI

Nella parte prima del testo ci siamo occupati della definizione dei vari tipi di limite e della verifica dell'esattezza o meno del limite. Nulla è stato detto sul modo di calcolare un limite. In questa seconda parte ci occuperemo delle tecniche relative al loro calcolo, al calcolo delle derivate e degli integrali e allo studio di funzioni.

Funzioni continue e discontinue

Consideriamo una funzione $y = f(x)$ e sia A il suo dominio. Sia $x_0 \in A$ e di accumulazione per A , ciò significa che in ogni intorno di x_0 , per quanto piccolo, cadono infiniti punti di A . Ha senso quindi calcolare il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e il valore della funzione $f(x_0)$.

*Diremo che una funzione è **continua** in x_0 se il limite e la funzione in x_0 sono uguali, se risulta cioè:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

In tutti gli altri casi la funzione si dice **discontinua** in x_0 .

Applicando la definizione di limite finito in un punto finito per $l = f(x_0)$ possiamo anche dire che:

*una funzione è **continua** nel punto x_0 se comunque scelto un numero $\varepsilon > 0$ (piccolo a piacere), è possibile trovare in corrispondenza a tale numero un intorno $I(x_0)$ tale che risulti: $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ per ogni $x \in I(x_0)$*

Esempio

Sia $f(x) = (3x + 2)$ che ha per dominio l'insieme \mathbb{R} . Il punto $x = 2$ appartiene al dominio ed è di accumulazione. Abbiamo verificato nell'esempio che $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 2) = 8$; risulta anche $f(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 8$. Possiamo concludere che la funzione è continua in $x = 2$ perché si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 2) = f(2)$$

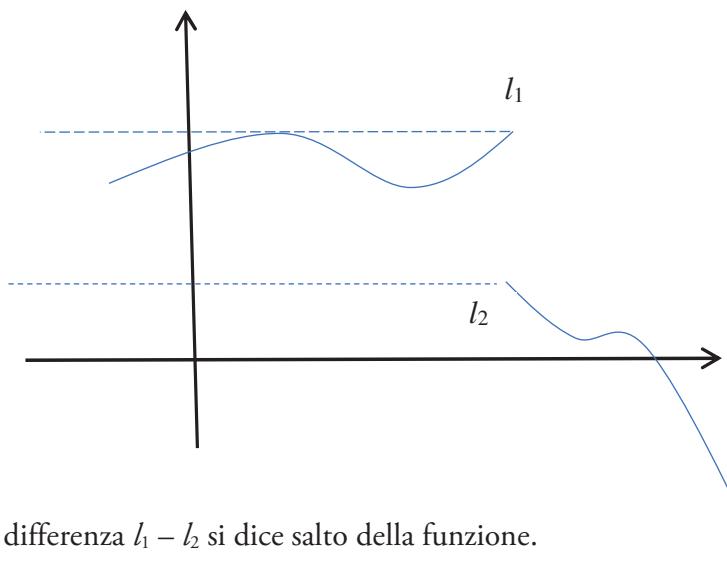
dal punto di vista grafico, dire che una funzione è continua in x_0 significa che è possibile tracciare il suo grafico nell'intorno di x_0 con continuità, senza cioè "staccare la mano dal foglio":

Casi di discontinuità

Discontinuità di prima specie

Se esiste il limite sinistro, esiste il limite destro e sono diversi fra di loro:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_1 \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_2 \quad l_1 \neq l_2$$

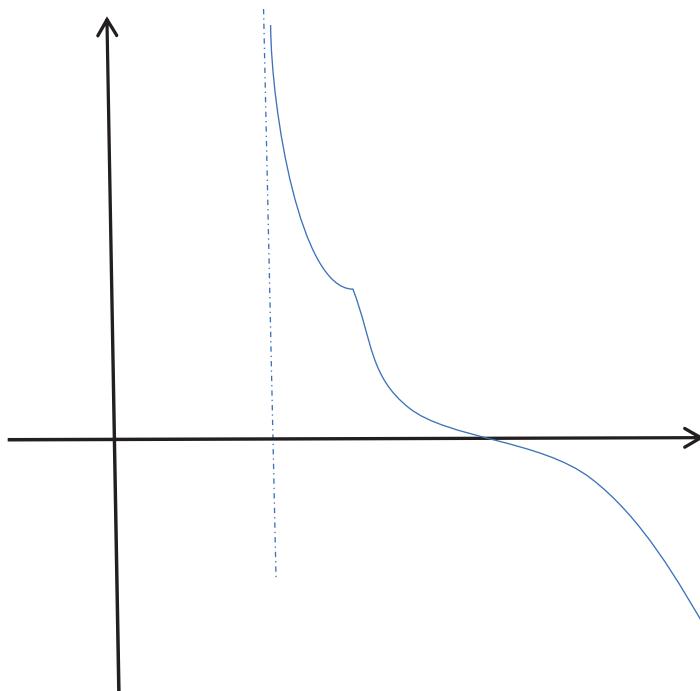


La differenza $l_1 - l_2$ si dice salto della funzione.

Discontinuità di seconda specie

Una funzione presenta una discontinuità di seconda specie in un punto quando, almeno uno dei limiti destro o sinistro in quel punto, è infinito o non esiste. In altre parole, la funzione "sale" o "scende" verso l'infinito, oppure non ha un comportamento ben definito in avvicinamento al punto. Il seguente grafico è un esempio.

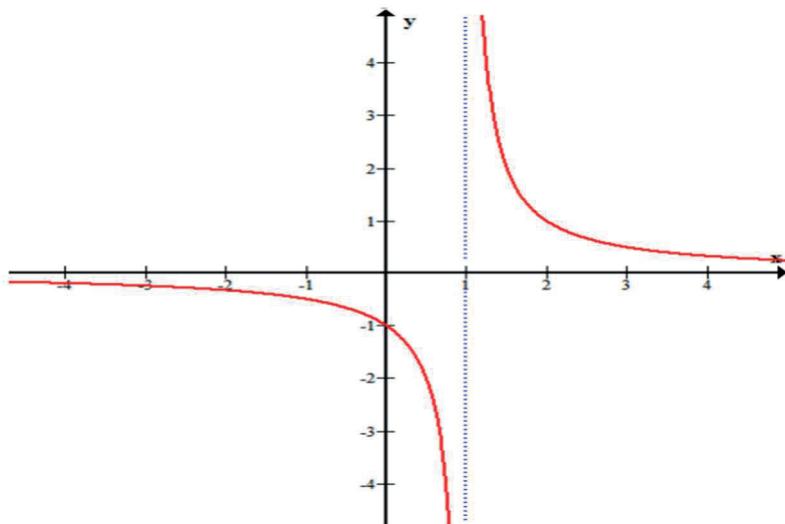
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_2, \quad l_1 \neq l_2$$



Esempio

La funzione $f(x) = \frac{1}{x-1}$ nel punto $x = 1$ ha una discontinuità di seconda specie, perché risulta:

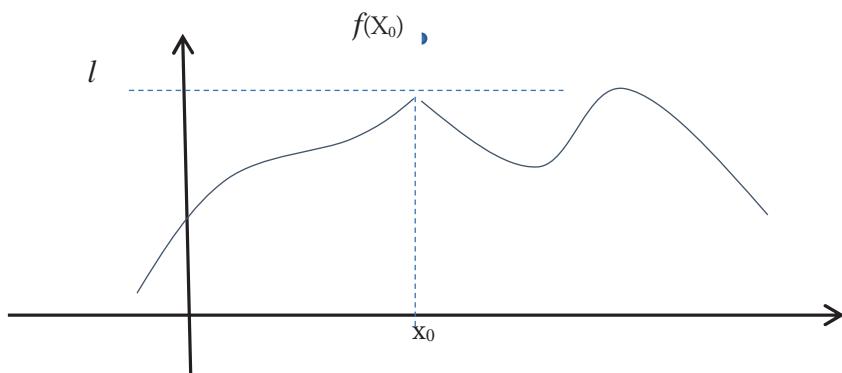
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$



Discontinuità eliminabile o di terza specie

Esiste il limite, il valore della funzione può esistere oppure no, ma se esiste sono diversi fra loro:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = l \neq f(x_0)$$



È eliminabile perché è possibile definire una nuova funzione del tipo:

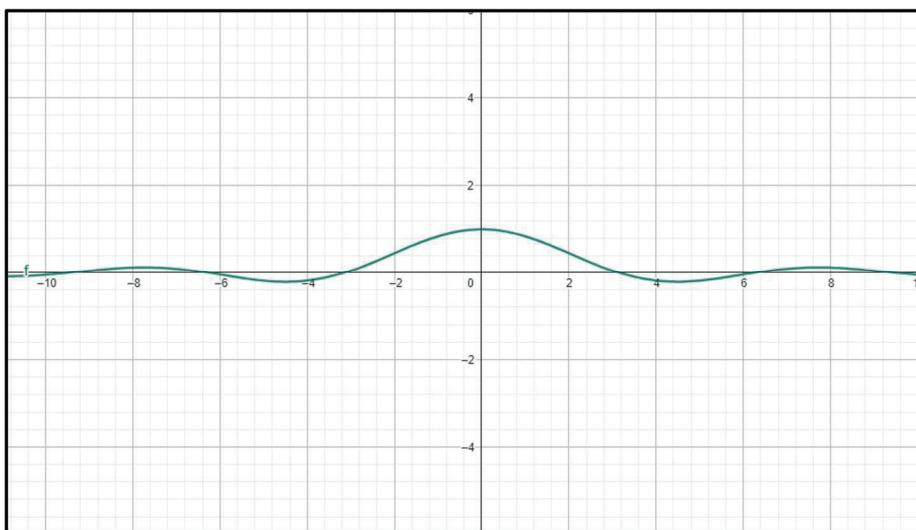
$$y(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \neq x_0 \\ l & \text{per } x = x_0 \end{cases}$$

Esempio

Sia $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$; posto $y = \frac{1}{x}$ si ha

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \operatorname{sen} y$ che non esiste perché il seno oscilla da -1 a +1

Diremo che è continua in un insieme A se è continua in ogni punto di A.



Calcolo dei limiti

Esempio

Sia $f(x) = (3x + 2)$ che ha per dominio l'insieme \mathbb{R} . Il punto $x = 2$ appartiene al dominio ed è di accumulazione. Abbiamo verificato nell'esempio che $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 2) = 8$ risulta anche $f(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 8$. Possiamo concludere che la funzione è continua in $x = 2$ perché si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 2) = f(2)$$

dal punto di vista grafico, dire che una funzione è continua in x_0 significa che è possibile tracciare il suo grafico nell'intorno di x_0 con continuità, senza cioè "staccare la mano dal foglio":

Il concetto di funzione continua ci apre la strada all'introduzione delle tecniche di calcolo dei limiti, infatti se si sa che una funzione è continua in x_0 , il calcolo del limite si esegue semplicemente sostituendo nella funzione alla variabile x il punto x_0 . Resta quindi il problema di stabilire se una funzione è continua. A tale scopo ci avvarremo di teoremi opportuni.

Limiti fondamentali

Chiamiamo limiti fondamentali alcuni limiti che servono come base per il calcolo di altri limiti più complessi.

limite della funzione costante $f(x) = k$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (k + 0 \cdot x) = k$$

Il termine $0 \cdot x$ è stato aggiunto per evidenziare che anche la funzione costante dipende dalla variabile x .

Il suo grafico è una retta parallela all'asse delle x :

Poiché $f(x) = k$ per qualunque valore x_0 possiamo concludere

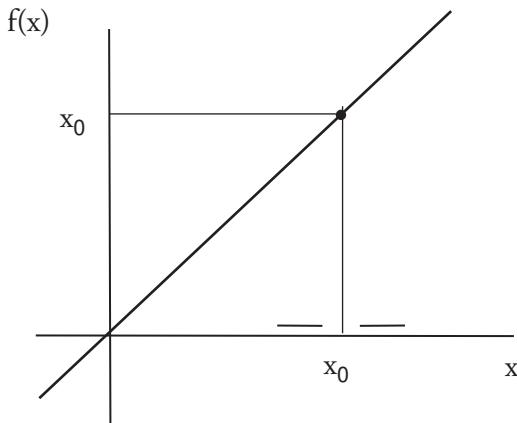
$$\lim_{x \rightarrow x_0} k = k . \text{ Ad esempio } \lim_{x \rightarrow 3} 5 = 5$$

Volendo dimostrare tale limite applicando la definizione dobbiamo far vedere che la disequazione $|f(x)-l| < \varepsilon$ risulta verificata in un intorno di x_0 , per qualunque ε . Poiché $f(x) = k$ ed $l = k$, sostituendo si ottiene $|k - k| < \varepsilon \Rightarrow 0 < \varepsilon$ che risulta sempre vera e quindi anche in un qualunque intorno di x_0 .

limite della funzione identità $f(x) = x$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

Si chiama funzione identità perché la funzione assume il valore della variabile indipendente, cioè ascissa uguale ordinata. Il suo grafico è la bisettrice del primo e terzo quadrante x :



Poiché $f(x_0) = x_0$ per qualunque valore x_0 (finito o infinito) possiamo concludere $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$. Ad esempio $\lim_{x \rightarrow 5} x = 5$

Per una dimostrazione rigorosa dobbiamo far vedere che la diseguazione $|f(x) - l| < \varepsilon$ risulta verificata in un intorno di x_0 , per qualunque $\varepsilon > 0$. Sostituendo $f(x) = x$ ed $l = x_0$, si ottiene:

$$|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 < +\varepsilon \\ x - x_0 > -\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < x_0 + \varepsilon \\ x > x_0 - \varepsilon \end{cases}$$

La funzione costante e la funzione identità sono funzioni continue in qualunque punto del loro dominio perché verificano la definizione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$