aracne

Classificazione Decimale Dewey:

510.76 (23.) MATEMATICA. Prontuari scolastici ed esercizi

SALVATORE GRILLO

CORSO DI MATEMATICA GENERALE

UN VIAGGIO ATTRAVERSO LE APPLICAZIONI DELLA MATEMATICA

TOMO II

aracne

ISBN
979–12–218–2385–1

PRIMA EDIZIONE
ROMA 20 FEBBRAIO 2026

INDICE

PREFAZIONE

La matematica è efficace nel costruire delle rappresentazioni del mondo reale. Galileo sosteneva che la natura è scritta in linguaggio matematico. La Matematica si rileva efficace anche nelle descrizioni delle Scienze naturali, da alcuni studiosi detta “Matematica della vita”. La rivoluzione tecnologica che stiamo vivendo è l’applicazione della matematica attraverso l'informatica, nelle sue varie manifestazioni: intelligenza artificiale, scienza dei dati, matematica nelle scienze umane, ecc.

Purtroppo non vi è in Italia una buona percezione della Matematica, nonostante l’Italia abbia dato i natali ad Archimede, considerato il più grande matematica dell’era antica; a Galileo, precursore della Meccanica di Newton; a Fibonacci, che oltre alle tante opere di Algebra e Geometria, introdusse i numeri indo-arabi in Europa; a Peano, studioso di Logica, Calcolo infinitesimale e di tanto altro. Non è raro sentire qualcuno dire quasi con orgoglio: “Io di Matematica non ho mai capito niente”.

Oggi la matematica si occupa di tante cose, le ricerche proseguano anche nello studio della “Matematica astratta”, la quale si potrà rivelare proficua nelle applicazioni future. Spesso si trovano relazioni inattese fra branche della Matematica, a prima vista assai distanti fra loro, e relazioni fra Matematica e le Scienze da essa lontane. È questo è il miracolo della Matematica.

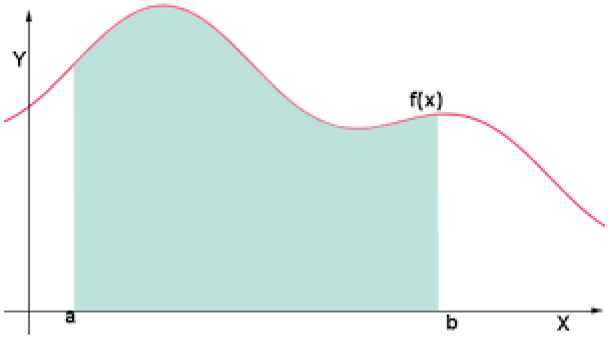
Questo testo di matematica generale copre argomenti di base dell'analisi, di geometria analitica, fornendo le fondamenta per discipline più specializzate. Ecco una suddivisione dettagliata degli argomenti:

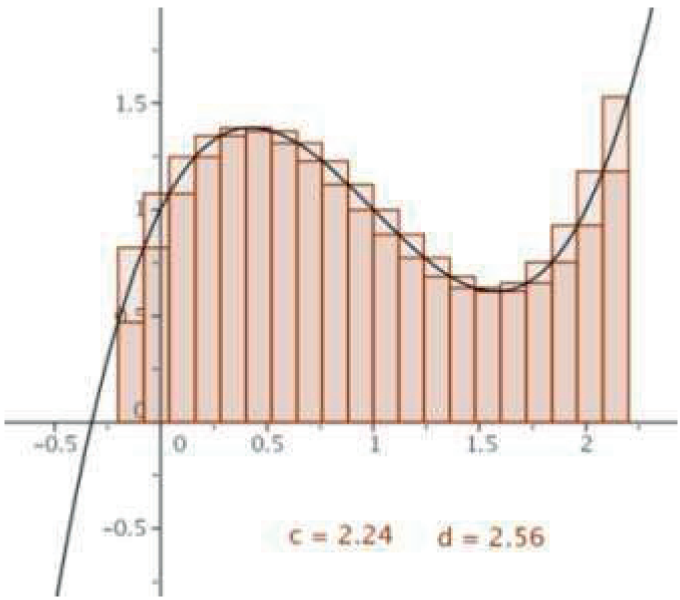
Pri

1. Numeri e sistemi numerici: Numeri naturali, relativi, razionali, reali, complessi.
2. Insiemi: Operazioni sugli insiemi, applicazioni, relazioni binarie, strutture.

3. Logica matematica: Linguaggi proposizionali, connettivi, quantificatori, dimostrazioni formali.
4. Geometria analitica: Coordinate cartesiane, retta, iperbole, parabola, ellisse, circonferenza, funzioni esponenziali
5. Algebra lineare: Matrici e determinanti, sistemi lineari.
6. Funzioni reali di una variabile reale: Definizioni, rappresentazione geometrica, limiti, continuità, derivate, integrali.
7. Calcolo differenziale: Derivate, applicazioni.
8. Calcolo integrale: Integrale indefinito, integrale definito, significato geometrico, cenni sugli integrali impropri, Cenni si equazioni differenziali.

Questo testo è particolarmente indicato per corsi di matematica generale per le facoltà di Economia, Biologia, Scienze, Ingegneria.


Y
f(x)
a
b
X


1.5
-0.5
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
c = 2.24
d = 2.56

IL CALCOLO DEI LIMITI

Nella parte prima del testo ci siamo occupati della definizione dei vari tipi di limite e della verifica dell'esattezza o meno del limite. Nulla è stato detto sul modo di calcolare un limite. In questa seconda parte ci occuperemo delle tecniche relative al loro calcolo, al calcolo delle derivate e degli integrali e allo studio di funzioni.

Funzioni continue e discontinue

Consideriamo una funzione $y = f(x)$ e sia A il suo dominio. Sia $x_0 \in A$ e di accumulazione per A, ciò significa che in ogni intorno di x_0, per quanto piccolo, cadono infiniti punti di A. Ha senso quindi calcolare il $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e il valore della funzione $f(x_0)$.

*Diremo che una funzione è **continua** in x_0 se il limite e la funzione in x_0 sono uguali, se risulta cioè:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

In tutti gli altri casi la funzione si dice ***discontinua*** in x_0.

Applicando la definizione di limite finito in un punto finito per $l = f(x_0)$ possiamo anche dire che:

una funzione è ***continua*** nel punto x_0 se com*unque scelto un numero* $\varepsilon > 0$ (*piccolo a piacere), è possibile trovare in corrispondenza a tale numero un intorno $I(x_0)$ tale che risulti: $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ per ogni $x \in I(x_0)$*

Esempio

Sia $f(x) = (3x + 2)$ che ha per dominio l'insieme R. Il punto × = 2 appartiene al dominio ed è di accumulazione. Abbiamo verificato nell'esempio che $\lim_{x \to 2} (3x + 2) = 8$; risulta anche f(*2*) = 3·2 + 2 = *8*. Possiamo concludere che la funzione è continua in × = 2 perché si ha:

$$\lim_{x \to 2} (3x + 2) = f(2)$$

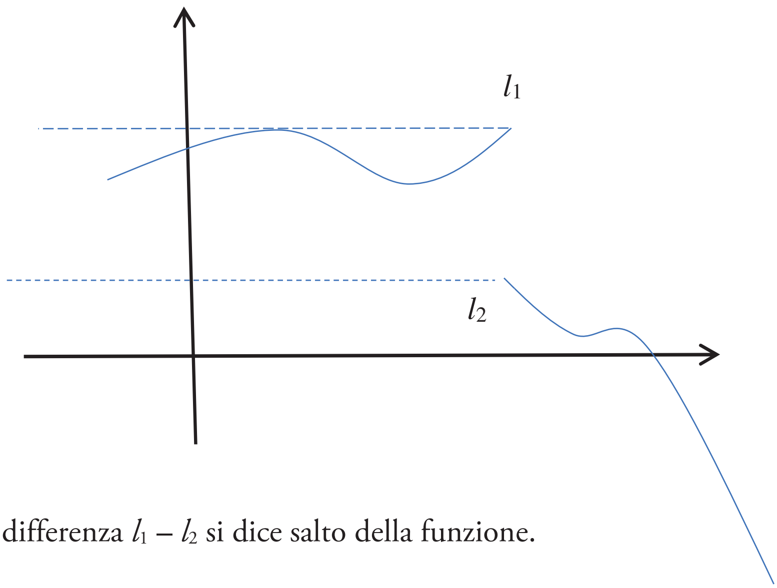
dal punto di vista grafico, dire che una funzione è continua in x_0 significa che è possibile tracciare il suo grafico nell'intorno di x_0 con continuità, senza cioè "staccare la mano dal foglio":

Casi di discontinuità

Discontinuità di prima specie

Se esiste il limite sinistro, esiste il limite destro e sono diversi fra di loro:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2 \qquad l_1 \neq l_2$$

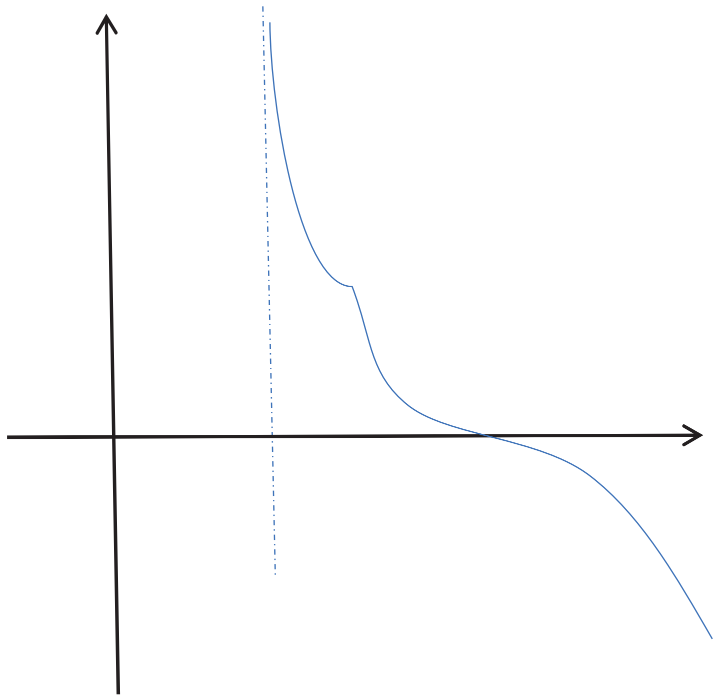


La differenza $l_1 - l_2$ si dice salto della funzione.

Discontinuità di seconda specie

Una funzione presenta una discontinuità di seconda specie in un punto quando, almeno uno dei limiti destro o sinistro in quel punto, è infinito o non esiste. In altre parole, la funzione "sale" o "scende" verso l'infinito, oppure non ha un comportamento ben definito in avvicinamento al punto. Il seguente grafico è un esempio.

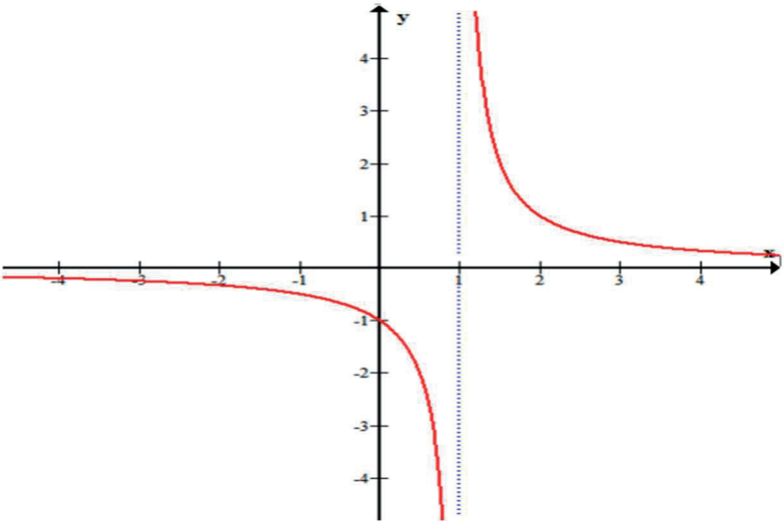
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1, \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2, \quad l_1 \neq l_2$$



Esempio

La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ nel punto $x = 1$ ha una discontinuità di seconda specie, perché risulta:

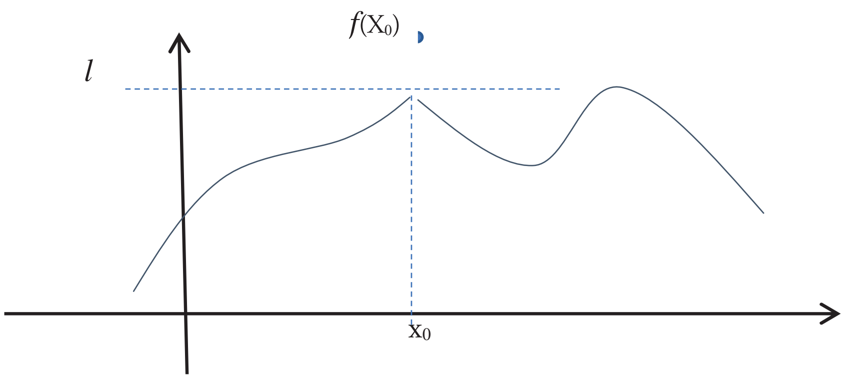
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$



Discontinuità eliminabile o di terza specie

Esiste il limite, il valore della funzione può esistere oppure no, ma se esiste sono diversi fra loro:

$$\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = l \neq f(x_0)$$



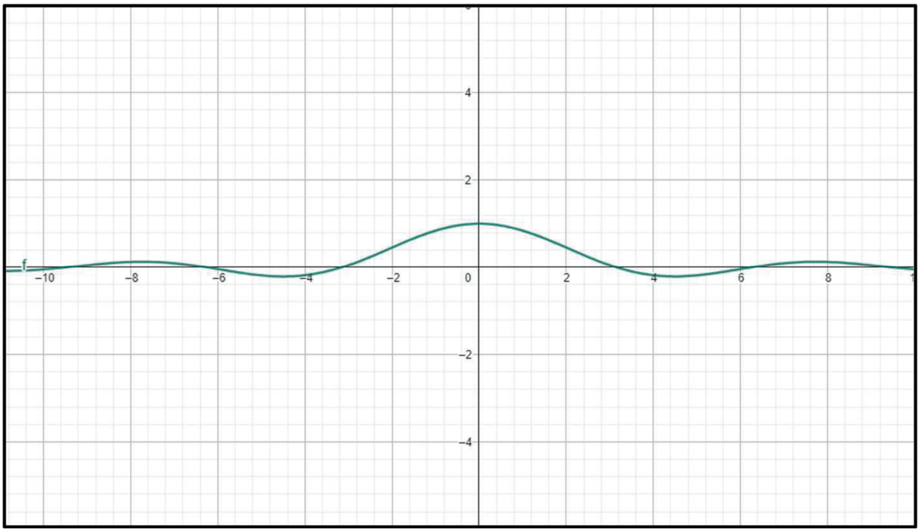
È eliminabile perché è possibile definire una nuova funzione del tipo:

$$y(x) = \begin{cases} f(x) & per\ x \neq x_0 \\ l \quad per & x = x_0 \end{cases}$$

Esempio

Sia $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$; posto $y = \frac{1}{x}$ si ha $\lim_{x \to 0^+} sen\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \to +\infty} sen\ y$ che non esiste perché il senno oscilla da -1 a + 1

Diremo che è continua in un insieme A se è continua in ogni punto di A.



Calcolo dei limiti

Esempio

Sia $f(x) = (3x + 2)$ che ha per dominio l'insieme R. Il punto $x = 2$ appartiene al dominio ed è di accumulazione. Abbiamo verificato nell'esempio che $\lim_{x \to 2} (3x + 2) = 8$ risulta anche $f(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 8$. Possiamo concludere che la funzione è continua in $x = 2$ perché si ha:

$$\lim_{x \to 2} (3x + 2) = f(2)$$

dal punto di vista grafico, dire che una funzione è continua in x_0 significa che è possibile tracciare il suo grafico nell'intorno di x_0 con continuità, senza cioè "staccare la mano dal foglio":

Il concetto di funzione continua ci apre la strada all'introduzione delle tecniche di calcolo dei limiti, infatti se si sa che una funzione è continua x_0, il calcolo del limite si esegue semplicemente sostituendo nella funzione alla variabile x il punto x_0. Resta quindi il problema di stabilire se una funzione è continua. A tale scopo ci avvarremo di teoremi opportuni.

Limiti fondamentali

Chiamiamo limiti fondamentali alcuni limiti che servono come base per il calcolo di altri limiti più complessi.

limite della funzione costante f(x) = **k**

$$\lim_{x \to x_0} (k + 0 \cdot x) = k$$

Il termine 0·x è stato aggiunto per evidenziare che anche la funzione costante dipende dalla variabile x.

Il suo grafico è una retta parallela all'asse delle x:

Poiché f(x) = *k* per qualunque valore x_0 possiamo concludere

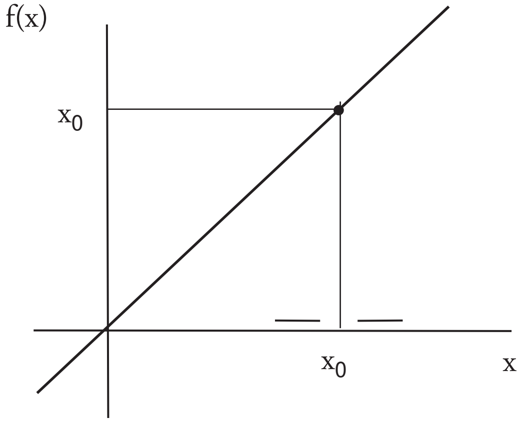
$\lim_{x \to x_0} k = k$. Ad esempio $\lim_{x \to 3} 5 = 5$

Volendo dimostrare tale limite applicando la definizione dobbiamo far vedere che la disequazione $|f(x)-l| < \varepsilon$ risulta verificata in un intorno di x_0, per qualunque . Poiché f(x) = k ed l = k, sostituendo si ottiene $|k - k| < \varepsilon \Rightarrow 0 < \varepsilon$ che risulta sempre vera e quindi anche in un qualunque intorno di x_0.

limite della funzione identità f(x) = x

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0$$

Si chiama funzione identità perché la funzione assume il valore della variabile indipendente, cioè ascissa uguale ordinata. Il suo grafico è la bisettrice del primo e terzo quadrante x:



Poiché $f(x_0) = x_0$ per qualunque valore x_0 (finito o infinito) possiamo concludere $\lim_{x \to x_0} x = x_0$. Ad esempio $\lim_{x \to 5} x = 5$

Per una dimostrazione rigorosa dobbiamo far vedere che la disequazione $|f(x) - l| < \varepsilon$ risulta verificata in un intorno di x_0, per qualunque $\varepsilon > 0$. Sostituendo $f(x) = x$ ed $l = x_0$, si ottiene:

$$|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 < +\varepsilon \\ x - x_0 > -\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < x_0 + \varepsilon \\ x > x_0 - \varepsilon \end{cases}$$

La funzione costante e la funzione identità sono funzioni continue in qualunque punto del loro dominio perché verificano la definizione:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$