aracne

Classificazione Decimale Dewey:

530.8 (23.) FISICA. MISURE

ROBERTO CAIMMI
GIOVANNI CARRARO
SANDRO VILLANOVA

LA DISTRIBUZIONE DEGLI ERRORI ACCIDENTALI

DUE PREMESSE E UNA VERIFICA EMPIRICA

aracne

aracne

ISBN
979–12–218–2166–6

PRIMA EDIZIONE
ROMA 1° SETTEMBRE 2025

Indice

PARTE III

VERIFICA EMPIRICA DELLA LEGGE DI DISTRIBUZIONE DEGLI ERRORI

PARTE IV
GALLERIA FOTOGRAFICA

PARTE I

Un esempio di grandezza fisica: la taglia della scarpa

1 Introduzione

Il concetto di grandezza fisica risulta di importanza fondamentale, essendo solamente le grandezze fisiche suscettibili di potersi misurare nello spazio fisico reale, **F**.

In generale, si definisce **grandezza** una caratteristica intrinseca riscontrabile in tutti gli elementi del sottoinsieme, $\mathbf{O}\subset\mathbf{F}$, direttamente accessibile ai sensi e ad opportuni strumenti che li potenziano, che per induzione si trasferisce a tutti gli elementi di **F**.

Ad esempio, la constatazione che i corpi presenti nel sistema solare si estendono nello spazio e durano nel tempo induce a ritenere altrettanto per i corpi presenti nel resto dell'universo, donde la conclusione che estensione e durata sono grandezze.

Sia R una relazione binaria definita in **O** e per induzione trasferibile a **F**, e sia aRb l'applicazione di R sugli elementi generici, a, b, di **O**. Particolari tipi di relazione binaria sono elencati nel seguito:

riflessiva $\forall a\,(aRa\ \&\ a\in\mathbf{O})$;

simmetrica $\forall a\forall b\,((aRb\to bRa)\ \&\ a\in\mathbf{O}\ \&\ b\in\mathbf{O})$;

transitiva $\forall a\forall b\forall c\,(((aRb\ \&\ bRc)\to aRc)\ \&\ a\in\mathbf{O}\ \&\ b\in\mathbf{O}$
$\&\ c\in\mathbf{O})$;

antisimmetrica $\forall a\forall b\,(((aRb\ \&\ bRa)\to a=b)\ \&\ a\in\mathbf{O}\ \&\ b\in\mathbf{O})$;

dove si è fatto uso dei simboli: $=$ (coincide con: *identificazione*); $\in$ (fa parte di: *affiliazione*); e dei simboli semantici: & (e: *congiunzione*); $\forall$ (per ogni: *quantificazione universale*); $\to$ (da cui si deduce: *implicazione*).

Ad esempio la relazione, *R: essere padre di*, non è né riflessiva, né simmetrica, né transitiva, né antisimmetrica.

La relazione, R, si dice **di equivalenza** quando è riflessiva, simmetrica, transitiva; si dice **di ordine** quando è riflessiva, antisimmetrica, transitiva.

La validità di una relazione di equivalenza su un dato insieme ne permette la suddivisione in **classi di equivalenza** i cui elementi sono caratterizzati da una proprietà qualificativa o **attributo** che fa astrazione da essi. Dal fatto che ogni elemento di una classe è equivalente a tutti gli elementi appartenenti alla stessa classe e non equivalente a tutti gli elementi appartenenti alle altre classi, discende necessariamente che attributi relativi a classi differenti non possono risultare identici pur essendo qualitativamente simili.

L'insieme, **Q**, degli attributi, o delle classi di equivalenza, rispetto ad una prefissata relazione, R (nella fattispecie binaria), definita sull'insieme, **O** (nella fattispecie sottoinsieme dello spazio fisico reale, **F**), dicesi **quoziente** di $\mathbf{O}$ rispetto a R. La validità di una relazione di ordine su $\mathbf{Q}$ permette una diversificazione quantitativa degli attributi in modo da stabilire quale tra due classi di equivalenza, arbitrarie ma prefissate, sia qualificata dal proprio attributo con grado inferiore o superiore.

Ogni classe di equivalenza viene a contenere elementi di $\mathbf{O}$ dove la grandezza in esame si manifesta con pari grado, mentre grandezze relative a classi differenti si possono diversificare quantitativamente mediante una relazione di ordine (in modo da stabilire quale tra due classi, arbitrarie ma prefissate, sia qualificata dalla grandezza con grado inferiore o superiore). In altri termini, la grandezza in esame è una **grandezza fisica**.

Nel seguito, ci si propone di particolarizzare le considerazioni precedenti al caso in cui la grandezza trattata sia la taglia della scarpa. Gli argomenti dei prossimi paragrafi saranno, nell'ordine: scopo dell'esperienza; taglia della scarpa; caratterizzazione dello spazio fisico reale, $\mathbf{F}$, e di un suo sottoinsieme, $\mathbf{O}$, in relazione alla taglia della scarpa; definizione della relazione binaria, R_{E}, che opera in $\mathbf{O}$; verifica che R_{E} è una relazione di equivalenza; suddivisione di $\mathbf{O}$ in classi di equivalenza ad opera di R_{E}; definizione dell'attributo qualificativo di ciascuna classe di equivalenza; definizione dell' insieme quoziente, $\mathbf{Q}$; definizione della relazione binaria, R_{O}, che opera in $\mathbf{Q}$; verifica che R_{O} è una relazione di ordine; verifica che la taglia della scarpa è una grandezza fisica; stato microscopico e stato macroscopico; distribuzione delle misure della taglia della scarpa.

2 Scopo dell'esperienza

L'esperienza è finalizzata a verificare che la taglia della scarpa è una grandezza, in particolare una grandezza fisica, quindi a defininire lo stato microscopico e lo stato macroscopico che si ha in corrispondenza, infine a rappresentare la distribuzione della taglia della scarpa relativamente a un campione di uomini e a un campione di donne, e successivamente ad individuare una possibile connessione con la controparte dedotta dalla teoria degli errori. Al riguardo, si procede attraverso i passaggi seguenti.

1) Taglia della scarpa: definizione e proprietà.

2) Taglia della scarpa: un caso particolare di grandezza.

3) Taglia della scarpa: un caso particolare di grandezza fisica.

4) Relazione binaria, R_{E}: *avere la stessa taglia della scarpa di.*

5) Verifica che R_{E} è una relazione di equivalenza in $\mathbf{O}$.

6) Suddivisione del dominio di R_{E} in classi di equivalenza.

7) Definizione dell'attributo qualificativo di ciascuna classe di equivalenza.

8) Definizione dell' insieme quoziente, $\mathbf{Q}$.

9) Relazione binaria, R_{O}: *avere la taglia della scarpa non inferiore alla taglia della scarpa di.*

10) Verifica che R_{O} è una relazione di ordine in $\mathbf{Q}$.

11) Corrispondenza biunivoca tra l' insieme quoziente e un sottoinsieme dei numeri reali.

12) Stato microscopico e stato macroscopico in relazione alla taglia della scarpa.

13) Distribuzione delle misure della taglia della scarpa e possibile connessione con la controparte dedotta dalla teoria degli errori.

I punti menzionati saranno trattati nei paragrafi successivi.

3 Taglia della scarpa

Si definisce **taglia della scarpa** (di qui in poi, per brevità, **taglia**) la tipologia di scarpa legata alla lunghezza interna longitudinale (da dove poggia la punta dell'alluce a dove poggia il retro del calcagno), che la rende atta ad essere calzata da un determinato genere di piede.

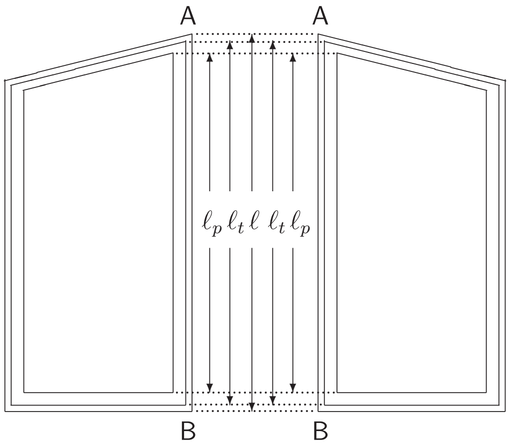
Al fine di interpretare la taglia alla stregua di una grandezza, si procede come segue. Sia $\mathbf{O}$ il sottoinsieme dello spazio fisico reale, $\mathbf{F}$, direttamente accessibile ai sensi e ad opportuni strumenti che li potenziano. Si suddividano gli elementi di $\mathbf{O}$ in due classi, recanti i corpi (animati e inanimati) in grado o non in grado, rispettivamente, di poggiare al suolo.

In relazione alla prima classe, si definisca **piede** la parte del corpo in grado di poggiare al suolo e si denominino le due estremità in senso longitudinale **punta dell'alluce** e **retro del calcagno**, rispettivamente. In relazione alla seconda classe, dove ogni elemento non è in grado di poggiare al suolo, si convenga che ciascun corpo è caratterizzato da un piede nullo, dove la punta dell'alluce coincide con il retro del calcagno.

Ne discende che ogni elemento di $\mathbf{O}$, e per induzione ogni elemento di $\mathbf{F}$, è dotato di almeno un piede e quindi può calzare almeno una scarpa caratterizzata da una taglia (in particolare, nulla). In altri termini, la taglia costituisce una caratteristica intrinseca di ogni elemento dello spazio fisico reale, in quanto tale una grandezza.

Al fine di interpretare la taglia alla stregua di una grandezza fisica, si procede come segue. Si definisca in $\mathbf{O}$ la relazione binaria, R_{E}: *avere la stessa taglia di* e siano a, b, c, elementi arbitrari ma prefissati di $\mathbf{O}$. R_{E} è riflessiva in quanto a ha la stessa taglia di se stesso. R_{E} è simmetrica in quanto se a ha la stessa taglia di b, allora b ha la stessa taglia di a. R_{E} è transitiva in quanto se a ha la stessa taglia di b e b ha la stessa taglia di c, allora a ha la stessa taglia di c. Ne discende che R_{E} è una relazione di equivalenza che, in quanto tale, suddivide $\mathbf{O}$ e per induzione $\mathbf{F}$ in classi di equivalenza, dove gli elementi appartenenti alla stessa classe sono caratterizzati dalla stessa taglia ed elementi appartenenti a classi diverse sono caratterizzati da taglie diverse. Pertanto la taglia determina l'attributo di ciascuna classe di equivalenza, e l'insieme quoziente, $\mathbf{Q}$, corrisponde all'insieme delle taglie.

Si definisca in $\mathbf{Q}$ la relazione binaria, R_{O}: *avere la taglia non inferiore alla taglia di* e siano a, b, c, elementi arbitrari ma prefissati di $\mathbf{Q}$. R_{O} è riflessiva in quanto a ha la taglia non inferiore alla taglia di se stesso. R_{O} è antisimmetrica in quanto se a ha la taglia non inferiore alla taglia di b e b ha la taglia non inferiore alla taglia di a, allora $a = b$. R_{O} è transitiva in quanto se a ha la taglia non inferiore alla taglia di b e b ha la taglia non inferiore alla taglia di c, allora a ha la taglia non inferiore alla taglia di c. Ne discende



$$\ell = \overline{\mathsf{AB}}\ ;$$

$$\ell_t = \ell - \delta_t\ell\ ;$$

$$\ell_p = \ell - \delta_p\ell\ ;$$

$$\delta_t\ell = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{cm}\ ;$$

$$\delta_p\ell = \tfrac{3}{2}\,\mathrm{cm}\ ;$$

$$1\,\mathrm{pf} = \tfrac{2}{3}\,\mathrm{cm}\ ;$$

Figura 1. Rappresentazione della pianta delle scarpe (esterno ed interno) e dei piedi in guisa di trapezi rettangoli (simili ma non congruenti), dove la base maggiore corrisponde alla lunghezza nel senso longitudinale, il lato retto (normale alle basi) al retro, e il vertice dell'angolo acuto alla punta. Spiegazione dei simboli: ℓ - lunghezza della scarpa; ℓ_t - taglia della scarpa; ℓ_p - lunghezza del piede; dove la manifattura delle scarpe stabilisce i valori, $\delta_t\ell = \ell - \ell_t = \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}$; $\delta_p\ell = \ell - \ell_p = \frac{3}{2}\,\mathrm{cm}$. Conformemente alla convenzione europea, la taglia si misura in punti francesi, dove $1\,\mathrm{pf} = \frac{2}{3}\,\mathrm{cm}$. Convenzioni differenti comportano unità di misura differenti, ad esempio il millimetro nel sistema Mondopoint e il centimetro nel sistema nipponico.

che R_O è una relazione di ordine che, in quanto tale, quantifica gli elementi di $\mathbf{Q}$.

In conclusione, la taglia qualifica gli elementi di $\mathbf{F}$ per il tramite della relazione di equivalenza, $R_\mathbf{E}$, e quantifica gli elementi di $\mathbf{Q}$ per il tramite della relazione di ordine, $R_\mathbf{O}$, oltre a costituire una caratteristica intrinseca di ogni elemento dello spazio fisico reale, in quanto tale una grandezza fisica.

Di qui in poi, l'attenzione sarà limitata al caso di interesse, in cui gli elementi di $\mathbf{O}$ sono costituiti da esseri umani. Si definisca pianta la proiezione ortogonale della scarpa (esterno o interno) o del piede, sul piano di appoggio. Ai fini di una maggiore semplicità e di una maggiore chiarezza, le piante delle scarpe (esterno ed interno) e dei piedi saranno rappresentate in guisa di trapezi rettangoli, simili ma non congruenti (ossia non sovrapponibili nel piano), come schematizzato in Fig. 1, dove la base maggiore corrisponde alla lunghezza nel senso longitudinale, il lato retto (normale alle basi) al retro, e il vertice dell'angolo acuto alla punta.

La definizione di taglia fornita in precedenza comporta la validità della relazione:

$$\ell_t = \ell - \delta_t \ell \quad ; \qquad \delta_t \ell = \frac{1}{2} u_\ell \quad ; \tag{1}$$

essendo ℓ, ℓ_t, la lunghezza esterna e la lunghezza interna, rispettivamente, della scarpa in senso longitudinale, dove $\delta_t \ell = \frac{1}{2}$ cm è stabilita dalla manifattura delle scarpe e $u_\ell = 1$ cm è l'unità di misura adottata per la lunghezza.

D'altra parte, la lunghezza esterna della scarpa è legata alla lunghezza del piede dalla relazione:

$$\ell_p = \ell - \delta_p \ell \quad ; \qquad \delta_p \ell = \frac{3}{2} u_\ell \quad ; \tag{2}$$

essendo ℓ_p la lunghezza del piede in senso longidudinale, dove $\delta_p \ell = \frac{3}{2}$ cm è stabilita dalla manifattura delle scarpe.

Esprimendo la taglia in termini dell'unità di misura della taglia, u_t, e dell'unità di misura della lunghezza, u_ℓ, si ha:

$$m_t u_t = \left(m_\ell - \frac{1}{2} \right) u_\ell \quad ; \qquad u_t = \frac{2}{3} u_\ell \quad ; \tag{3}$$

essendo m_t e m_ℓ la misura della taglia e della lunghezza esterna della scarpa, rispettivamente, dove in conformità alla convenzione europea l'unità di misura della taglia è stata equiparata al punto francese[1] (1 pf $= \frac{2}{3}$ cm).

Utilizzando la (3) si ottiene:

$$\begin{aligned} m_t &= \left(m_\ell - \frac{1}{2} \right) \frac{u_\ell}{u_t} = \frac{3}{2} \left(m_\ell - \frac{1}{2} \right) \quad ; \\ m_\ell &= m_t \frac{u_t}{u_\ell} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} m_t + \frac{1}{2} \quad ; \end{aligned}$$

e quindi in definitiva:

$$m_t = \frac{3(2m_\ell - 1)}{4} \quad ; \tag{4}$$

$$m_\ell = \frac{4m_t + 3}{6} \quad ; \tag{5}$$

che esprime la misura della taglia in funzione della misura della lunghezza della scarpa, e viceversa, conformemente ai risultati elencati in Tab. 1 con l'utilizzo delle (1)-(5). Si riscontra una corrispondenza biunivoca tra le taglie (elementi dell' insieme quoziente) e le misure delle taglie (elementi di un sottoinsieme dell' insieme dei numeri reali, nella fattispecie l' insieme dei numeri naturali).

[1] Convenzioni differenti comportano unità di misura della taglia differenti, ad esempio il millimetro nel sistema Mondopoint e il centimetro nel sistema nipponico.

Tabella 1. Corrispondenza tra le misure della lunghezza della scarpa (s), della lunghezza del piede (p), della taglia (t), in centimetri e in punti francesi (per valori dal 36 al 45), rispettivamente. La misura della lunghezza del piede in millimetri e in centimetri corrisponde alla misura della taglia in punti Mondopoint e nipponici, rispettivamente. Per motivi puramente estetici, i numeri interi e i numeri decimali limitati sono denotati dallo zero periodico nelle righe recanti numeri periodici.

s	$24.5\overline{0}$	$25.1\overline{6}$	$25.8\overline{3}$	$26.5\overline{0}$	$27.1\overline{6}$	$27.8\overline{3}$	$28.5\overline{0}$	$29.1\overline{6}$	$29.8\overline{3}$	$30.5\overline{0}$
p	$23.\overline{0}$	$23.\overline{6}$	$24.\overline{3}$	$25.\overline{0}$	$25.\overline{6}$	$26.\overline{3}$	$27.\overline{0}$	$27.\overline{6}$	$28.\overline{3}$	$29.\overline{0}$
t	$24.\overline{0}$	$24.\overline{6}$	$25.\overline{3}$	$26.\overline{0}$	$26.\overline{6}$	$27.\overline{3}$	$28.\overline{0}$	$28.\overline{6}$	$29.\overline{3}$	$30.\overline{0}$
t	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45

4 Soluzione del problema della misura

Conformemente ai dati elencati in Tab. 1, la taglia è espressa da un numero naturale, per cui la soluzione del problema della misura si formula nella maniera:

$$m_t \mp \Delta^{\mp} m_t \quad ; \qquad \Delta^{\mp} m_t = \frac{1}{2} \quad ; \tag{6}$$

dove l'unità di misura è il punto francese, $1\,\mathrm{pf} = \frac{2}{3}\,\mathrm{cm}$. Un tale risultato si otterrebbe misurando la taglia con una scala graduata dove il passo è dato dal punto francese: in tali condizioni, m_t corrisponde alla tacca della scala che più si avvicina a un'estremità della taglia, avendo posizionato lo zero della scala sull'altra estremità.

Passando dai punti francesi ai centimetri, la soluzione del problema della misura per la taglia, espressa dalla (6), diviene:

$$\frac{2}{3}\left(m_t \mp \Delta^{\mp} m_t\right) \quad ; \qquad \Delta^{\mp} m_t = \frac{1}{2} \quad ; \tag{7}$$

dove l'unità di misura è il centimetro.

Di qui, e dalla (5), supponendo che il contributo dominante all'errore sia dovuto all' indeterminazione sulla taglia, si trae la soluzione del problema della misura per la lunghezza della scarpa:

$$m_\ell = \frac{2}{3} m_t + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{3} \quad ; \tag{8}$$

dove m_ℓ è espressa in cm e m_t in pf.

Di qui, e dalla (2), supponendo che il contributo dominante all'errore sia dovuto all' indeterminazione sulla taglia, si trae la soluzione del problema della misura per la lunghezza del piede:

$$m_p = \frac{2}{3} m_t - 1 \mp \frac{1}{3} \quad ; \tag{9}$$

dove m_p è espressa in cm e m_t in pf.