



Classificazione Decimale Dewey:

510.76 (23.) MATEMATICA. Prontuari scolastici ed esercizi

SALVATORE GRILLO

**CORSO DI
MATEMATICA GENERALE
UN VIAGGIO ATTRAVERSO
LE APPLICAZIONI DELLA MATEMATICA**

TOMO I





©

ISBN
979-12-218-2090-4

PRIMA EDIZIONE
ROMA 20 FEBBRAIO 2026

INDICE

PREFAZIONE	11
NUMERI NATURALI.....	13
Sistema di Numeratione Decimale (o a base 10)	13
<i>Riconoscimento degli ordini di grandezza di un numero e sua forma polinomiale</i>	15
<i>Forma polinomiale generale di un numero intero.....</i>	16
<i>Le quattro Operazioni nell'insieme dei numeri naturali</i>	17
Addizione e moltiplicazione fra numeri naturali.....	18
<i>Legge di annullamento del prodotto.....</i>	21
Multipli di un numero naturale	22
Sottrazione e divisione fra numeri naturali	23
<i>Sottomultipli o divisori di un numero naturale</i>	26
<i>Numeri primi e numeri composti</i>	27
<i>Crivello di Eratostene per la ricerca dei numeri primi.....</i>	28
<i>Criteri di divisibilità</i>	29
<i>Criteri di divisibilità per un numero composto (non primo).....</i>	32
Scomposizione di un numero in fattori primi.....	34
<i>Massimo comune divisore fra più numeri (MCD).....</i>	35
<i>Minimo Comune Multiplo fra più numeri (mcm)</i>	36
<i>Calcolo del minimo comune multiplo fra più numeri per mezzo della scomposizione in fattori primi.....</i>	37
La Divisione con resto	38
Potenza di un numero naturale.....	40
<i>Proprietà delle potenze.....</i>	40
<i>Numeri immaginari e numeri complessi.....</i>	44
<i>Unità Immaginaria</i>	44
<i>Numero immaginario.....</i>	45
<i>Proprietà dei numeri immaginari</i>	45
<i>I numeri complessi</i>	46
<i>Espressioni con numeri complessi.....</i>	47
<i>Scomposizione nel campo dei complessi.....</i>	48
<i>Applicazione dei complessi alla risoluzione di equazioni.....</i>	48

<i>Numeri algebrici trascendenti</i>	51
Rappresentazione geometrica dei numeri complessi....	53
Rappresentazione trigonometria (o polare) dei numeri complessi	56
ELEMENTI DI LOGICA	67
Principi fondamentali del calcolo proposizionale	70
I connettivi logici.....	70
<i>Negazione logica -non-.....</i>	71
<i>Tavola di verità di un connettivo logico.....</i>	73
<i>Congiunzione logica -e- o prodotto logico</i>	74
<i>La disgiunzione logica -o- inclusiva o sommalogica.....</i>	76
<i>Espressioni logiche equivalenti – Leggi di De Morgan.....</i>	80
<i>Generalizzazione delle Leggi di De Morgan.....</i>	82
<i>Disgiunzione logica -o- esclusiva</i>	84
<i>L'implicazione materiale -se-</i>	86
<i>La doppia implicazione -se e solo se- (\leftrightarrow).....</i>	88
Riduzione del numero dei connettivi logici	89
<i>Eliminazione della -o esclusiva-.....</i>	90
<i>Eliminazione della doppia implicazione</i>	90
<i>Sostituzione dell'implicazione semplice.....</i>	90
<i>Altre interpretazioni della eliminazione dell'implicazione.....</i>	92
<i>Dimostrazione rigorosa delle proposizioni logicamente equivalenti.....</i>	92
Le proprietà fondamentali dei connettivi logici	94
<i>Proprietà commutativa della congiunzione e della disgiunzione</i>	94
<i>Proprietà associativa della congiunzione e della disgiunzione</i>	94
<i>La proprietà distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione</i>	95
<i>La proprietà distributiva della disgiunzione rispetto alla congiunzione</i>	95
<i>Leggi di idempotenza della congiunzione e della disgiunzione</i>	96
<i>Tautologie.....</i>	96
<i>Le contraddizioni</i>	97
Le operazioni logiche al computer	98

GLI INSIEMI.....	99
Concetto di Insieme.....	99
<i>Rappresentazione di un insieme</i>	100
<i>Simbologia per gli insiemi numerici</i>	100
Insieme vuoto – Insieme finito e infinito – Potenza	
o Cardinalità di un insieme	103
Sottoinsieme e uguaglianza fra insiemi.....	104
Insieme delle parti o booleano di un insieme	106
Operazioni con gli insiemi.....	108
<i>Unione di due insiemi</i>	108
Cardinalità dell'unione	109
Intersezione di due insiemi	110
<i>Relazione fra cardinalità dell'unione e dell'intersezione</i>	111
Proprietà distributive dell'intersezione e dell'unione	116
Complementare di un insieme B rispetto ad un insieme A.....	120
<i>Differenza simmetrica di due insiemi</i>	121
<i>Copertura e partizione di un insieme.....</i>	122
<i>Partizione di un insieme A</i>	122
Leggi di De Morgan.....	124
<i>Complementare dell'unione</i>	124
<i>Complementare dell'intersezione</i>	124
<i>Il confronto fra insiemi infiniti</i>	125
Insieme Numerabile (Aleph zero)	126
La potenza dei numeri razionali.....	127
La potenza dei numeri reali R (Aleph uno)	130
La potenza intermedia fra i naturali e i reali	132
La potenza superiore ad R.....	133
RELAZIONE FRA LOGICA E INSIEMI.....	135
Gli insiemi di verità	137
I connettivi logici e gli insiemi.....	137
LA DEDUZIONE LOGICA.....	141
Modus Ponens	143
Modus Tollens	144
<i>Ragionamenti non validi</i>	145
<i>Forma simbolica delle figure di ragionamento</i>	146
Concetto di condizione sufficiente	148

Concetto di condizione necessaria	148
Il teorema A \Rightarrow B.....	149
Concetto di condizione necessaria e sufficiente.....	150
Sillogismo ipotetico	151
CENNI DI LOGICA DEI PREDICATI.....	153
Funzioni logiche o predicati	154
I Quantificatori.....	155
Relazione fra Logica delle proposizioni e Logica dei Predicati..	158
Relazione fra quantificatori esistenziali e universali.....	158
La deduzione nella logica dei predicati	162
Le operazioni logiche al computer	163
RELAZIONI FRA INSIEMI	165
Prodotto cartesiano fra due Insiemi	165
<i>Prodotto cartesiano di un insieme in sé stesso.....</i>	<i>167</i>
<i>Metodi di rappresentazione grafica del prodotto cartesiano</i>	<i>167</i>
<i>Relazione fra due insiemi.....</i>	<i>170</i>
<i>Relazione inversa.....</i>	<i>171</i>
<i>Relazione di un insieme in sé</i>	<i>173</i>
Le Proprietà delle Relazioni in un Insieme	174
<i>Proprietà riflessiva.....</i>	<i>174</i>
<i>Proprietà simmetrica</i>	<i>174</i>
<i>Proprietà transitiva</i>	<i>175</i>
<i>Proprietà antisimmetrica</i>	<i>176</i>
Relazione di Equivalenza	176
<i>Classi di equivalenza – Insieme Quoziente</i>	<i>177</i>
Relazione di ordinamento	180
Relazione d'ordinamento parziale.....	182
Relazione d'ordinamento totale	182
<i>Massimo e Minimo di un insieme ordinato.....</i>	<i>183</i>
<i>Maggioranti e minoranti di un elemento</i>	<i>185</i>
<i>Minimo comune maggioranti e massimo comune minorante fra più elementi.....</i>	<i>185</i>
LE RELAZIONI CON EXCEL	189
Il Prodotto cartesiano fra due insiemi.....	190
<i>La relazione fra due insiemi.....</i>	<i>193</i>
Relazione di un insieme in sé e relative proprietà	194

Relazioni che non possono essere descritte mediante funzioni matematiche.....	198
FUNZIONI O APPLICAZIONI	199
 Concetto di funzione	199
<i>Dominio, immagine e codominio di una funzione.....</i>	202
<i>Funzioni suriettive – iniettive – biiettive.....</i>	202
<i>Funzioni inverse ($f^{-1} : B \rightarrow A$).....</i>	205
<i>Funzioni calcolabili</i>	206
<i>Funzioni numeriche.....</i>	206
<i>Funzioni razionali, irrazionali, intere, fratte.....</i>	207
Tabulazione di una funzione numerica $y = f(x)$ in un insieme discontinuo di punti di un intervallo $[a,b]$	208
Il Diagramma cartesiano di una funzione numerica....	211
 Le Funzioni con il Derive	213
 Programmazione Funzionale	213
 Uso degli Operatori Logici.....	214
LE STRUTTURE ALGEBRICHE.....	217
 Operazione binaria interna.....	217
 Struttura algebrica (A, \otimes).....	217
<i>Le Tabella dei risultati dell'operazione</i>	219
<i>Le proprietà di una struttura algebrica</i>	219
<i>Semigruppo.....</i>	219
<i>Elementi neutri e simmetrici.....</i>	221
<i>Gruppo.....</i>	223
Le Strutture algebriche con Derive ed Excel	229
<i>Struttura con due leggi di composizione interna A (\otimes, \square)</i>	235
FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE	239
 Funzioni razionali – irrazionali – intere – fratte.....	240
 Funzione definita a tratti.....	241
 Grafico cartesiano di una funzione	243
 Ricerca dominio (o campo di esistenza)	244
IL CONCETTO DI LIMITE DI UNA FUNZIONE	251
 Il concetto di limite finito nel punto più infinito (Asintoto orizzontali)	251
 Limite finito nel punto meno infinito	256

Limite finito in un punto infinito	258
<i>Limite infinito in un punto infinito</i>	258
Punto più infinito e limite più infinito	259
Punto meno infinito e limite più infinito.....	261
<i>Punto Infinito e limite più infinito.....</i>	262
<i>Punto più infinito e limite meno infinito</i>	263
<i>Punto meno infinito e limite più infinito</i>	265
<i>Punto più infinito e limite più infinito</i>	265
<i>Punto meno infinito e limite meno infinito</i>	265
Punto infinito e limite meno infinito.....	267
Limite infinito in un punto finito	268
Limiti sinistri e destri.....	272

PREFAZIONE

La matematica è efficace nel costruire delle rappresentazioni del mondo reale. Galileo sosteneva che la natura è scritta in linguaggio matematico. La Matematica si rileva efficace anche nelle descrizioni delle Scienze naturali, da alcuni studiosi detta “Matematica della vita”. La rivoluzione tecnologica che stiamo vivendo è l'applicazione della matematica attraverso l'informatica, nelle sue varie manifestazioni: intelligenza artificiale, scienza dei dati, matematica nelle scienze umane, ecc.

Purtroppo non vi è in Italia una buona percezione della Matematica, nonostante l'Italia abbia dato i natali ad Archimede, considerato il più grande matematico dell'era antica; a Galileo, precursore della Meccanica di Newton; a Fibonacci, che oltre alle tante opere di Algebra e Geometria, introdusse i numeri indo-arabi in Europa; a Peano, studioso di Logica, Calcolo infinitesimale e di tanto altro. Non è raro sentire qualcuno dire quasi con orgoglio: “Io di Matematica non ho mai capito niente”.

Oggi la matematica si occupa di tante cose, le ricerche proseguano anche nello studio della “Matematica astratta”, la quale si potrà rivelare proficua nelle applicazioni future. Spesso si trovano relazioni inattese fra branche della Matematica, a prima vista assai distanti fra loro, e relazioni fra Matematica e le Scienze da essa lontane. È questo è il miracolo della Matematica.

Questo testo di matematica generale copre argomenti di base dell'analisi, di geometria analitica, fornendo le fondamenta per discipline più specializzate. Ecco una suddivisione dettagliata degli argomenti:

Numeri e sistemi numerici: Numeri naturali, relativi, razionali, reali, complessi

Logica matematica: Linguaggi proposizionali, connettivi, quantificatori, dimostrazioni formali.

Insiemi: Operazioni sugli insiemi, applicazioni, relazioni binarie, strutture.

Geometria analitica: Coordinate cartesiane, retta, iperbole, parabola, ellisse, circonferenza, funzioni esponenziali

Algebra lineare: Matrici e determinanti, sistemi lineari.

Funzioni reali di una variabile reale: Definizioni, rappresentazione geometrica, limiti, continuità, derivate, integrali.

Calcolo differenziale: Derivate, applicazioni.

Calcolo integrale: Integrale indefinito, integrale definito, significato geometrico, cenni sugli integrali impropri, Cenni sui equazioni differenziali.

Questo testo è particolarmente indicato per corsi di Matematica generale nelle facoltà di Economia, Scienze biologiche,

NUMERI NATURALI

Concetto di numero

Se nel vocabolario Garzanti cerchiamo la parola "numero" troviamo:

Il numero è ciò che indica la quantità di oggetti di un insieme.

La spiegazione sembra esauriente, ma immaginiamo di non conoscere il significato della parola "quantità" e cerchiamo il suo significato, sempre nello stesso vocabolario. Esso riporta:

Quantità è la proprietà delle cose di essere misurabile per il loro numero.

Ci riporta quindi al punto di partenza perché richiama la parola "numero" di cui non conosciamo il significato. Si cade in un circolo vizioso dal quale non si esce.

Per eliminare il circolo vizioso si può immaginare di dare per scontata la conoscenza del significato di alcune parole che consideriamo "*termini o concetti primitivi*" e di definire a partire da essi il significato di altre parole. Quindi se assumiamo come concetto primitivo il significato delle parole "Quantità e Insieme", possiamo dare la seguente definizione di "Numero Naturale"

Il numero è ciò che si usa per indicare la quantità degli oggetti di un insieme.

Sistema di Numerazione Decimale (o a base 10)

Un sistema di numerazione è un insieme di regole e di simboli che ci permettono di indicare in modo simbolico il numero di oggetti di un insieme.

Il nostro sistema di numerazione è detto a base 10 o decimale perché ha 10 simboli come elementi base:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

La convenzione adottata consiste nell'attribuire alle cifre che compongono

un numero intero maggiore di 9 un valore diverso a seconda della posizione da esse occupate. Per tale motivo è detto Posizionale. Ad esempio: 25 diverso da 52 pur contenendo le stesse perché il 25 è composto da 5 unità e due decine, mentre il 52 da 2 unità e cinque decine.

Le cifre (0,1, 2,.....9) vengono dette unità del primo ordine o unità semplici. Essendo 10 le cifre si è stabilito che 10 unità del primo ordine formano un'unità del secondo ordine, e così via. In generale la regola di formazione dei numeri interi è la seguente:

Dieci unità di un dato ordine formano un'unità dell'ordine superiore. Qualunque cifra posta alla immediata sinistra di un'altra rappresenta un'unità dell'ordine immediatamente superiore rispetto all'ordine rappresentato da quest'ultima.

Dec. di Mig€	Migliaia = M.	Centinaia = C.	Decine = D.	Unità = u
10 M.	1000 u.	100 u.	10 u.	1

Riconoscimento degli ordini di grandezza di un numero e sua forma polinomiale

Ricordati che si definisce potenza il prodotto di più fattori uguali a se stessi.

Esempi: $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$, $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$.

Ricordati anche, che per convenzione, qualunque numero diverso da zero elevato a zero fa uno: $3^0 = 1$, $5^0 = 1$.

Consideriamo il numero 4572 esso si può scrivere:

$$4.572 = 4.000 + 500 + 70 + 2 = 4 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 2 \times 1;$$

risulta immediato il valore di ciascuna cifra:

$$4 = 4 \times 1000 \text{ unità} = 4 \text{ migliaia};$$

$$5 = 5 \times 100 \text{ unità} = 5 \text{ centinaia}; 7 = 7 \times 10 \text{ unità} = 4 \text{ decine};$$

$$2 = 2 \times 1 \text{ unità} = 2 \text{ unità}$$

Inoltre il numero può essere scritto utilizzando le potenze di 10 e tale scrittura prende il nome di **forma polinomiale**:

$$4.572 = 4 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

Forma polinomiale generale di un numero intero

Generalizziamo

- 1) Sia n il valore di un numero di due cifre; x e y rispettivamente le cifre delle unità e delle decine Il valore di tale numero si scriverà: $n = 10y + x$
- 2) Se il numero è di tre cifre con x , y , z rispettivamente le unità le decine e le centinaia si avrà: $n = 100z + 10y + z$

Indichiamo con:

a_0 = cifra delle unità,

a_1 = cifra delle decine,

a_2 = cifra delle centinaia,

.....

a_{n-1} = cifra del penultimo ordine,

a_n = cifra dell'ultimo ordine.

Il valore del numero in forma polinomiale algebrica sarà:

$$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + \dots + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_n \cdot 10^n$$

Prova tu

- 1) Scrivi in forma polinomiale i numeri 35, 468, 6823; 3267, 405072.
- 2) Scrivi in forma polinomiale il numero le cui cifre sono nell'ordine x , y , z , t .
- 3) Scrivi in forma polinomiale un numero composto da due cifre. (Indica con x e y rispettivamente la cifra delle unità e delle decine)
- 4) Scrivi in forma polinomiale il numero le cui cifre sono nell'ordine x , y , z , t

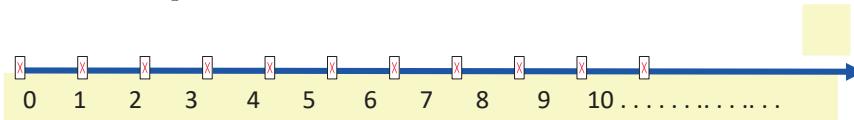
Le quattro Operazioni nell'insieme dei numeri naturali

I numeri naturali sono i primi numeri di cui si è servito l'uomo per enumerare gli oggetti. Potremmo dire che il numero naturale è il risultato del conteggio. I numeri naturali si indicano con N

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, \infty\}.$$

∞ = simbolo per indicare l'infinito.

I numeri naturali li possiamo rappresentare su una semiretta orientata. Tale rappresentazione, con i successivi ampliamenti di concetto di numero, che vedremo in seguito, ci permette un approccio visivo geometrico dei numeri e ci facilità la comprensione



concetti e operazione relative ai numeri.

Nell'insieme dei numeri naturali vengono definite le 4 operazioni fondamentali: **addizione, moltiplicazione, sottrazione e divisione**. Tali operazioni sono degli operatori nel senso che operando su due numeri (naturali) fanno corrispondere un terzo numero naturale che è il risultato dell'operazione.

Prospetto delle operazioni				
Operazione	Simbolo	Primo Numero	Secondo Numero	Risultato operazione
Addizione	+	Addendo	Addendo	Somma
Sottrazione	-	Minuendo	Sottraendo	Differenza
Moltiplicazione	×, oppure ·	Fattore	Fattore	Prodotto
Divisione	: oppure /	Dividendo	Divisore	Quoziente

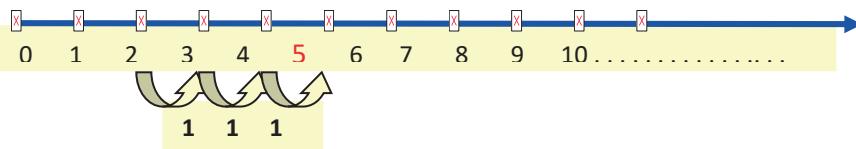
Addizione e moltiplicazione fra numeri naturali

Definizione di Addizione

Dati due numeri naturali a e b , l'operazione di addizione $a + b$ consiste nello spostarsi sulla retta orientata a partire da a , di tante unità pari al numero b . Il risultato di tale operazione viene detto **somma**.

Esempio

Per calcolare $2 + 3$ dobbiamo posizionarci sulla retta orientata sul numero 2 e aggiungere 3 unità.:



L'operazione di addizione si può considerare, di tutte le quattro operazioni, quella fondamentale in quanto le operazioni di moltiplicazione, sottrazione e divisione si possono definire a partire dall'addizione. Seguiremo nel seguito questo approccio.

Definizione di moltiplicazione

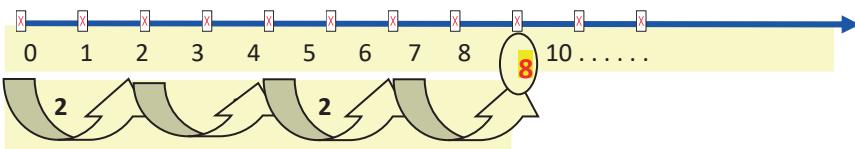
Dati nell'ordine due numeri naturali a e b , si definisce moltiplicazione e si indica con $a \times b$ o con $a \cdot b$, l'operazione che consiste nell'addizionare b volte il numero a . Il risultato dell'operazione si chiama **prodotto**.

La moltiplicazione è quindi un'addizione ripetuta in cui tutti gli addendi sono uguali.

Esempio

$$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8.$$

Possiamo dare, come per l'addizione, una rappresentazione grafica della mol-



tiplicazione:

Esempi

$$1) \ 5 \cdot 3 = 5 + 5 + 5 = 15; \ 3 \cdot 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$$

$$2) \ 0 \cdot 4 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0;$$

3) $4 \cdot 0$ non può essere calcolato applicando la definizione, perché bisognerebbe ripetere il 4 zero volte, il che non autorizza a dire che fa zero. Vedremo il modo di aggirare l'ostacolo.

Proprietà dell'addizione e della moltiplicazione

Proprietà commutativa

La somma e il prodotto di due numeri non cambiano se cambia l'ordine degli addendi. In simboli: $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$

Esempi

$$3 + 2 = 5, \ 2 + 3 = 5, \ 3 \cdot 2 = 6, \ 2 \cdot 3 = 6.$$

Tale proprietà ci consente di dare un significato anche al prodotto $a \cdot 0$. Infatti essendo per tale proprietà $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, possiamo quindi concludere che qualunque numero moltiplicato 0 fa sempre zero.

Proprietà associativa

L'addizione di più numeri presi nell'ordine si ottiene prima addizionando il primo con il secondo, poi addizionando al risultato così ottenuto il terzo, e così via. In modo analogo si esegue la moltiplicazione.

Per indicare che un calcolo deve essere eseguito prima i suoi termini devono essere racchiusi fra parentesi. Si può sempre usare la parentesi rotonda, come nelle calcolatrici, l'ordine dei calcoli va dalle coppie di parentesi più interne a quelle più esterne. In simboli:

$$a + b + c + d + \dots = ((a + b) + c) + d + \dots$$

Esempio

$$2 + 4 + 5 + 7 = (((2 + 4) + 5) + 7) = ((6 + 5) + 7) = (11 + 7) = 18.$$

Si possono utilizzare anche le parentesi quadrate e graffe. In ogni caso l'eliminazione delle parentesi procede dall'interno verso l'esterno; è consuetudine utilizzare nell'ordine, dall'interno verso l'esterno, prima le tonde, poi le quadre e quindi le graffe.

$$2 + 4 + 5 + 7 = \{[(2 + 4) + 5] + 7\} = \{[6 + 5] + 7\} = \{11 + 7\} = 18.$$

Il procedimento di calcolo può essere semplificato applicando la proprietà associativa:

La somma (o il prodotto) non cambia se a due o più di essi si sostituisce la loro somma (o il loro prodotto). In simboli:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$