



Classificazione Decimale Dewey:

510.76 (23.) MATEMATICA. Prontuari scolastici ed esercizi

ANTONIO CASERIO

PROBLEMI E ARGOMENTI DI MATEMATICA





ISBN
979-12-218-2037-9

PRIMA EDIZIONE
ROMA 7 LUGLIO 2025

*Al mio maestro,
Alfio Lapezzata*

Il filosofo greco Aristippo (Cirene 435 a.C. – Lipari 366 a. C.) era naufragato su una spiaggia sconosciuta, quando notò un disegno geometrico sulla sabbia. «È un buon presagio», disse ai suoi compagni, «vi scorgo l'impronta dell'uomo.»

Indice

11 *Premessa*

13 Capitolo I

La formula di Taylor

1.1. Premessa, 13 – 1.2. Origine della formula, 13 – 1.3. Formula di Taylor, 18 – 1.4. Approssimazioni di funzioni, 19.

27 Capitolo II

L'ellisse e il moto dei pianeti

2.1. L'ellisse, 27 – 2.2. Area dell'ellisse e della circonferenza, 31 – 2.3. Lunghezza della circonferenza e dell'ellisse, 32 – 2.4. Le coniche, 35 – 2.5. Il moto dei pianeti nell'antica Grecia, 35 – 2.6. Il sistema eliocentrico di Copernico, 38 – 2.7. Le leggi di Keplero sul moto dei pianeti, 40 – 2.8. Galileo Galilei, il sistema eliocentrico e le sue opere, 42 – 2.9. Isaac Newton e la gravitazione universale, 44 – 2.10. La legge di gravitazione universale, 47 – 2.11. Momento angolare di un corpo, 52 – 2.12. La legge delle orbite dei pianeti, 55 – 2.13. Validità delle leggi di Keplero, 60 – 2.14. Equazione di una conica in coordinate polari, 61.

63 Capitolo III

Una curva celebre

3.1. La curva catenaria, 63 – 3.2. Equazione della catenaria, 64 – 3.3. Caratteristiche della catenaria, 68 – 3.4. Un utilizzo particolare della catenaria, 69 – 3.4.1 Approfondimento 1, 73 – 3.4.2. Approfondimento 2, 74.

77 Capitolo IV

Il problema delle ampole sferiche

4.1. Enigmi e giochi, 77 – 4.2. Il problema delle ampole sferiche, 78 – 4.3. Alcuni approfondimenti, 83. 4.4. Ancora due problemi di Dudeney, 90.

91 Capitolo V

Il volume di una botte di vino

5.1. Premessa, 91 – 5.2. Le botti di vino, 91 – 5.3. Metodi empirici per il volume, 92 – 5.4 Metodi matematici per il volume, 94.

103 Capitolo VI

Il biliardo circolare

6.1. Il problema, 103.

109 Capitolo VII

Enigmi di Martin Gardner

7.1. Premessa, 109 – 7.2. Le mele di Coleridge, 109 – 7.3. Un teorema sui punti fissi, 111 – 7.4. Quanto sono andati lontano gli Smith? 113.

117 Capitolo VIII

Un problema di geometria di fine Ottocento

8.1. Premessa, 117 – 8.2. Il problema, 117 – 8.3 Un esempio con misure assegnate, 119.

121 Capitolo IX

Eratostene di Cirene

9.1. Premessa, 121 – 9.2. Misura della circonferenza terrestre, 121 – 9.3. Il crivello per setacciare i numeri primi, 123 – 9.4. La duplicazione del cubo, 126 – 9.5. Il mesolabio, 128 – 9.6. Altre soluzioni del problema di Delo, 133.

137 Capitolo X

Estrazione di radice di indice qualsiasi

10.1. Algoritmo babilonese, 137.

141 Capitolo XI

Le lancette dell'orologio

11.1. Premessa, 141 – 11.2. Le lancette dell'orologio, 141 – 11.3. Prima risoluzione, 141 – 11.4. Seconda risoluzione, 142.

145 Capitolo XII

Claudio Tolomeo

12.1. Premessa, 145 – 12.2. Teoria delle corde e valore di π , 145 – 12.3. Geometria euclidea, 148 – 12.4. Un celebre teorema di Tolomeo, 150 – 12.5. Altre opere di Tolomeo, 152.

155 Capitolo XIII

Un problema di inizi Novecento

13.1. Premessa, 155 – 13.2. Testo originale del problema, 155 – 13.3. Il testo del problema dattiloscritto, 156 – 13.3.1. Prima risoluzione, 156 – 13.3.2. Seconda risoluzione, 159 – 13.3.3. Limiti del problema, 160.

163 Capitolo XIV

Il paracadute

14.1. Premessa, 163 – 14.2. La legge di caduta dei gravi, 163.

167 Appendice A

171 Appendice B

175 Appendice C

179 Bibliografia

Premessa

Questo libro raccoglie gli ultimi dei tanti articoli pubblicati nel periodico *Notiziario dell'Istria* che il mio amico e compagno di studi ing. Sergio Moretti divulga in Porto S. Giorgio (Fermo), con impegno e dedizione costante, per l'associazione culturale *Amici dell'Istria*.

Gli articoli sono per lo più dedicati alla risoluzione di problemi di varia matematica, al fine di stimolare i lettori, periti industriali, ingegneri e docenti a rivedere le proprie conoscenze e a riorganizzarle. Per esperienza, chi scrive può dire che trovare le soluzioni corrette di enigmi e problemi è molto gratificante, dà maggiore consapevolezza alle proprie capacità, allena la mente e, in un certo senso, fa stare meglio.

A tale scopo, nel libro sono presenti alcune nozioni di matematica superiore necessarie per affrontare argomenti come la caduta di un paracadute, il volume di una botte di vino e quant'altro.

Completano il testo lo studio del moto dei pianeti intorno al sole e le biografie dei protagonisti antichi e moderni che ne hanno fatto la storia.

I capitoli del libro non sono propedeutici e ognuno può leggerli secondo i propri interessi.

Infine, sono molto grato alla prof.ssa Gaetana Calabrese sempre disponibile a rileggere gli articoli e a dare utili suggerimenti.

La formula di Taylor

1.1. Premessa

La formula di Taylor¹ è di grande rilievo in matematica e nelle scienze perché permette di approssimare con polinomi i valori di certe funzioni difficilmente calcolabili, a es. e^x , $\sin x$, $\sqrt[n]{x}$ e tante altre.

1.2. Origine della formula

Nelle Fig. (1.1) si è disegnato il grafico² di una funzione $y = f(x)$ *continua* in un intervallo chiuso $[a, b]$ e *derivabile* in ogni suo interno. Sia s la retta secante la curva per i punti $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$, per il teorema di Lagrange esiste un punto interno di ascissa x_0 tale che in $C(x_0, f(x_0))$ la retta t di equazione:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (1)$$

di coefficiente angolare $f'(x_0)$ è tangente alla curva in C ed è parallela alla secante s .

¹ Brook Taylor (1685 – 1731) dottore in legge e matematico inglese, fu allievo di Newton. Si occupò di calcolo differenziale, di ottica e di geometria descrittiva, fu uno dei primi a coniugare l'arte con la scienza.

² È usuale chiamare anche *curva* il grafico di una funzione.

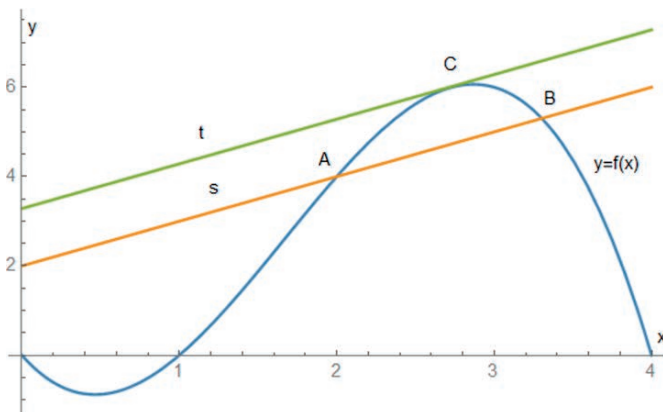


Figura 1.1. Approssimazione di Taylor con una retta.

Se si immagina di muovere la secante parallelamente alla tangente e verso di essa, fino a farla coincidere, i due punti A e B si sovrapporranno, ciò equivale al fatto che la retta tangente t ha due punti di contatto con la curva. Se ne deduce che in un intorno $I_{x_0} \equiv (x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$ del punto x_0 , con Δx incremento molto piccolo di x , la tangente t di equazione (1), come si può vedere dal grafico di Fig.1.1, coincide con la curva, in altre parole nell'intorno I_{x_0} la tangente t approssima bene la curva data. Lo possiamo verificare proprio con le equazioni della curva e della tangente di Fig. 1.1.

La curva ha equazione

$$y = f(x) = -x^3 + 5x^2 - 4x,$$

la secante ha eq. $y = x + 2$, la tangente $y = g(x) = x + 3,285$ e il punto di tangenza ha ascissa $x_0 = 2,727$.

Diamo, ora, un piccolo incremento a x_0 , ponendo $\Delta x = 0,1$ cosicchè si ha l'intorno

$$I_{x_0} \equiv (2,727 - 0,1; 2,727 + 0,1) = (2,627; 2,827).$$

Scegliamo un valore $x = \xi$ interno all'intervallo I_{x_0} , a es. $\xi = 2,75$ e calcoliamo i valori sulla curva e sulla tangente. Si ha sulla la tangente $g(\xi) = 6,035$ e sulla curva $f(\xi) = 6,015$ con la differenza

$$6.035 - 6,015 = 0.02,$$

di 2 centesimi tra quello vero sulla curva e quello approssimato sulla tangente. Tale differenza si chiama *resto*, dipende dall'incremento Δx e si indica con $R_1(x)$, con il pedice 1 che si riferisce alla derivata prima della funzione. Nell'intorno I_{x_0} si può scrivere quindi:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$$

o anche

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x). \quad (3)$$

Si può pensare, poi, a una approssimazione migliore se nell'intorno I_{x_0} invece della retta tangente ci fosse una parabola passante per il punto x_0 con i coefficienti in relazione con le derivate. La parabola che cerchiamo ha equazione:

$$P(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2 \quad (4)$$

Se confrontiamo la (4) con la (3) viene naturale porre:

$$A = f(x_0) \quad \text{e} \quad B = f'(x_0)$$

Dato che la (2) approssima bene la funzione $f(x)$ nell'intorno I_{x_0} . Si ha, allora, il polinomio di 2° grado:

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + C(x - x_0)^2 \quad (5)$$

Se calcoliamo adesso le derivate della (5) fino al secondo ordine, abbiamo:

$$P'(x) = f'(x_0) + 2C(x - x_0)$$

$$P''(x) = 2C = f''(x_0) \quad (6)$$

Dalla (5) e dalla (6) si ha:

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \quad (7)$$

Se come prima scegliamo $x_0 = 2,727$ e $\xi = 2,75$

Si ottiene dalla funzione $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 4x$

$$f(\xi) = f(2,75) = 6,01563$$

Dalla (7) con i calcoli fatti con una moderna calcolatrice scientifica si ricava la seguente equazione della parabola:

$$\begin{aligned} P(x) &= 5,99523 + 0,960413(x - 2,727) - \frac{1}{2}6,5(x - 2,727)^2 = \\ &= -3,25x^2 + 18,6859x - 20,7925 \quad (7b) \end{aligned}$$

e risulta:

$$P(\xi) = P(2,75) = 6,01560$$

con il resto che vale:

$$R_2(x) = f(\xi) - P(\xi) = 6,01563 - 6,01560 = 0,00003$$

Nell'intorno I_{x_0} possiamo, allora, scrivere:

$$f(x) = P(x) + R_{2x} \quad (8)$$

Con il resto R_{2x} che è molto minore di $R_1(x)$, come visibilmente mostrato nel grafico di Fig.1.2:

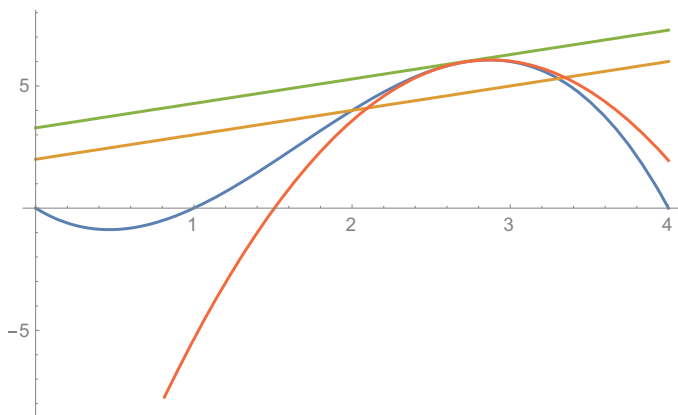


Figura 1.2. Approssimazione di Taylor di una funzione con una parabola.

Nella Fig. 1.2 si vede che il grafico della parabola (7b) ha, nell'intorno $I_{x_0}(2,627; 2,827)$ di $x_0 = 2,727$, più punti di

contatto con la curva della funzione $f(x)$, rispetto alla tangente t .³

Si noti anche che il resto $R_2(x)$ è molto minore del resto $R_1(x)$.

1.3. Formula di Taylor

Dopo queste premesse si può arrivare alla formula di Taylor che stiamo cercando, aumentando il grado del polinomio e l'ordine delle derivate.

Sia $y = f(x)$ una funzione definita in un intervallo E di numeri reali. Sia x_0 un punto di E e sia soddisfatta l'ipotesi:
a) La funzione $y = f(x)$ sia derivabile in E fino all'ordine $n - 1$, con n intero positivo, e derivabile fino all'ordine n nel punto x_0 . Sulla scorta di quanto fatto nel paragrafo precedente si può costruire il polinomio di grado n :

$$P^n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (9)$$

che, come visto, approssima bene la $y = f(x)$. Se poi al polinomio $P^n(x)$ addizioniamo il resto $R_n(x)$ possiamo scrivere:

$$f(x) = P^n(x) + R_n(x) \quad (10)$$

che è la formula di Taylor. Si è visto, anche, nell'esempio precedente che $R_2(x)$ è molto minore di $R_1(x)$ e si dimostra

³ La curva $f(x)$ dell'esempio è stata scelta casualmente e per questo motivo i calcoli sono stati laboriosi. Volendo si sarebbe potuto scegliere una funzione costruita apposta ma ciò non accade quasi mai nei problemi reali.