



Classificazione Decimale Dewey:

512.02 (23.) ALGEBRA ASTRATTA

CARMEN CARANO

**I QUATERNIONI E IN GENERALE
GLI IPERCOMPLESSI
PARTENDO DALLA FORMULA
DI CAYLEY-DICKSON**





ISBN
979-12-218-1891-8

PRIMA EDIZIONE
ROMA 18 LUGLIO 2025

*Ai miei genitori,
Corrado e Maria*

INDICE

- 9 *Sunto*
- 13 1. Gli insiemi ipercomplessi a partire dalla formula di Cayley-Dickson
- 29 2. I quaternioni e in generale gli ipercomplessi
- 33 3. Le operazioni fondamentali tra quaternioni immaginari e in generale tra ipercomplessi immaginari
3.1. Somma, 33 – 3.2. Differenza, 35 – 3.3. Prodotto, 37 – 3.4. Quoziente, 45.
- 49 4. Le operazioni fondamentali tra quaternioni e in generale tra ipercomplessi
4.1. Somma, 49 – 4.2. Differenza, 50 – 4.3. Prodotto, 50 – 4.4. Quoziente, 54 – 4.5. Osservazioni sull'elemento neutro del prodotto e, in generale, sul prodotto di frazioni, 55.
- 59 5. Costruzione degli ampliamenti numerici

8 *Indice*

- 63 6. Rappresentazione dell'insieme dei quaternioni in infiniti piani di Gauss (esclusi i punti degli assi reali) e in un asse reale
- 75 7. Rappresentazione di un qualunque insieme ipercomplesso in infiniti piani di Gauss (esclusi i punti degli assi reali) e in un asse reale

SUNTO

In questo lavoro si dà una visione unitaria degli insiemi numerici successivi all'insieme dei numeri reali: si introducono gli elementi degli insiemi ipercomplessi partendo dall'assunto che essi siano definiti in modo analogo ai numeri complessi, utilizzando quindi, per la loro costruzione, la formula di Cayley-Dickson e ottenendo così una serie di relazioni tra essi, tra le quali ritroviamo anche la definizione hamiltoniana dei quaternioni e quanto noto, in generale, sulle algebre ipercomplesse.

Si analizzano poi le quattro operazioni fondamentali partendo dall'insieme dei quaternioni: prima si considerano le operazioni tra quaternioni immaginari, e quindi tra i vettori identificabili con essi, e da ciò si arriva alla definizione del prodotto e del quoziente di due vettori; si evidenzia inoltre come la formula del prodotto di quaternioni immaginari (e quindi dei vettori identificabili con essi) permetta di superare l'apparente mancanza di coerenza tra il

prodotto di due unità immaginarie uguali e quello di due unità immaginarie diverse; si considerano poi le operazioni tra quaternioni generici e ci si sofferma su alcune apparenti contraddizioni sull'elemento neutro del prodotto di quaternioni e in generale sul prodotto di due frazioni. Di volta in volta, si generalizzano i risultati ottenuti nell'insieme dei quaternioni a qualunque insieme ipercomplesso (e ai vettori identificabili con gli ipercomplessi immaginari).

Si affronta poi la questione della non validità, a partire dall'insieme dei quaternioni, del principio di Hankel di permanenza delle proprietà formali, in base alla quale non potremmo pensare agli insiemi ipercomplessi come ampliamenti dei precedenti insiemi numerici; si introducono quindi, in sostituzione di tale principio, nuovi criteri per la costruzione degli ampliamenti numerici, in base ai quali ogni insieme ipercomplesso può essere considerato ancora un ampliamento dei precedenti insiemi numerici.

Partendo dai quaternioni e poi generalizzando a ogni insieme ipercomplesso, si vede infine come in ognuno di tali insiemi può essere definita una relazione di equivalenza che permette di individuare una sua partizione in infinite classi di cui una identificabile con l'insieme reale, e quindi rappresentabile in un asse reale e le altre, costituite da ipercomplessi con parte immaginaria non nulla, ognuna delle

quali rappresentabile in un piano di Gauss, esclusi i punti del suo asse reale. Ogni insieme ipercomplesso quindi può essere considerato come unione di infiniti suoi sottoinsiemi disgiunti: nel sottoinsieme dei quaternioni con parte immaginaria nulla continueranno ovviamente a valere le stesse proprietà formali valide nell'insieme dei reali, in ognuno degli altri sottoinsiemi della partizione varranno le stesse proprietà formali valide nell'insieme dei numeri complessi e pertanto si potrà operare come si opera in tale insieme.