



Classificazione Decimale Dewey:

532 (23.) MECCANICA DEI FLUIDI

**ROBERTO CAIMMI
GIOVANNI CARRARO**

**LA GUIDOVIA A CUSCINO D'ARIA
IN POSIZIONE ORIZZONTALE
TRE VERIFICHE EMPIRICHE**





©

ISBN
979-12-218-1682-2

PRIMA EDIZIONE
ROMA 27 GENNAIO 2025

Indice

PARTE I

VERIFICA EMPIRICA DELLA RELAZIONE LINEARE TRA LA VELOCITÀ DI UN CARRELLO IN MOTO LIBERO E LA RESISTENZA DELL'ARIA IN REGIME LAMINARE

11	1. Introduzione
13	2. Scopo dell'esperienza
15	3. Attrito viscoso nei fluidi in regime laminare
17	4. Moto rettilineo lungo un piano inclinato: fluido ambiente viscoso in regime laminare
25	5. Moto rettilineo lungo un piano orizzontale: fluido ambiente viscoso in regime laminare
31	6. Soluzione del problema della misura
37	7. Verifica grafica sul piano cartesiano
39	8. Elaborazione dei dati
47	9. Conclusione
49	10. Bibliografia

PARTE II

VERIFICA EMPIRICA DEGLI EFFETTI DOVUTI ALL'ERRORE BIOLOGICO INTRODOTTO DALLO SPERIMENTATORE

53	11. Introduzione
55	12. Scopo dell'esperienza

6 *Indice*

57	13. Effetti dell'errore biologico
59	14. Elaborazione dei dati
63	15. Conclusione
65	16. Bibliografia

PARTE III
VERIFICA EMPIRICA DELLE LEGGI DELL'URTO:
– CENTRALE, NORMALE, ELASTICO
– CENTRALE, NORMALE, TOTALMENTE ANELASTICO

69	17. Introduzione
71	18. Scopo dell'esperienza
73	19. Urto e sua classificazione
77	20. Urto centrale e normale di tipo elastico
79	21. Urto centrale e normale di tipo anelastico
85	22. Soluzione del problema della misura
87	23. Verifica grafica sul piano cartesiano
89	24. Elaborazione dei dati
105	25. Conclusione
107	26. Bibliografia

APPENDICE

111	A. Usura degli strumenti: influenza sui dati
	A.1. Dati correnti, 111 – A.2. Confronto con i dati tratti dall'archivio, 121.

PARTE IV
GALLERIA FOTOGRAFICA

129 27. Introduzione

131 28. Galleria fotografica

141 *Ringraziamenti*

PARTE I

**Verifica empirica della relazione lineare
tra la velocità di un carrello in moto libero
e la resistenza dell'aria in regime laminare**

1 Introduzione

L'utilizzo della guidovia a cuscino d'aria per la verifica empirica della dipendenza lineare della velocità dallo spazio percorso, in seguito alla traslazione di un corpo rigido all'interno di un fluido viscoso in regime laminare e in assenza di forza motrice, presso i laboratori delle Università e di altro genere, è di così lunga data da rendere superfluo qualsiasi ulteriore cenno al riguardo. Viceversa, l'analisi degli errori sulla velocità, determinata per il tramite di un metodo di misura indiretto, e una discussione accurata sulle verifiche effettuate, hanno ricevuto scarsa considerazione a causa di una maggiore complessità del problema. Tali argomenti, tuttavia, ci sembrano inevitabili ai fini di una trattazione globale, e costituiscono lo scopo della presente ricerca.

Le motivazioni esposte impongono di ridurre al minimo indispensabile le considerazioni già ampiamente sfruttate per la verifica della dipendenza lineare della velocità dallo spazio percorso, e al contrario di dare ampio risalto a tutto quanto, molto meno dibattuto, concerne l'applicabilità della formula di propagazione degli errori per la determinazione dello scarto di precisione¹ (o scarto quadratico medio) e la soluzione del problema della misura, relativamente alla velocità.

Gli argomenti dei prossimi paragrafi saranno, nell'ordine: scopo dell'esperienza; attrito viscoso nei fluidi in regime laminare; moto rettilineo lungo un piano inclinato: fluido ambiente viscoso in regime laminare; moto rettilineo lungo un piano orizzontale: fluido ambiente viscoso in regime laminare; soluzione del problema della misura; verifica grafica sul piano cartesiano; elaborazione dei dati. Una galleria fotografica che ritrae gli aspetti essenziali della strumentazione è presentata nella parte quarta.

¹Si preferisce denominare **errore di precisione** e **scarto di precisione** il parametro comunemente definito come **errore quadratico medio** e **scarto quadratico medio**, rispettivamente, a motivo di quanto segue. L'errore quadratico medio e quindi lo scarto quadratico medio, che ne costituisce la stima più attendibile, è inversamente proporzionale al **modulo di precisione** della distribuzione delle misure corrispondente al metodo utilizzato. In questa accezione, si può definire la **precisione** di un metodo di misura come l'inverso dell'errore di precisione della relativa distribuzione delle misure.

2 Scopo dell'esperienza

L'esperienza è finalizzata alla verifica della dipendenza lineare della velocità dallo spazio percorso, in seguito alla traslazione di un corpo rigido immerso all'interno di un fluido viscoso in regime laminare e in assenza di forza motrice, utilizzando un carrello che scorre senza attrito radente su una guida rettilinea orizzontale, dopo aver ricevuto un impulso iniziale. Al riguardo, si procede attraverso i passaggi seguenti.

- 1) Attrito viscoso nei fluidi in regime laminare.
- 2) Moto rettilineo lungo un piano inclinato: fluido ambiente viscoso in regime laminare.
- 3) Moto rettilineo lungo un piano orizzontale: fluido ambiente viscoso in regime laminare.
- 4) Soluzione del problema della misura.
- 5) Verifica grafica sul piano cartesiano.
- 6) Compatibilità del coefficiente di viscosità dinamica dell'aria, in condizioni ambiente, con la retta d'interpolazione dedotta dai dati, nei limiti d'errore.
- 7) Verifica (a posteriori) che l'attrito viscoso dovuto all'aria è trascurabile e quindi opera in regime laminare.

I punti menzionati saranno trattati nei paragrafi successivi.

3 Attrito viscoso nei fluidi in regime laminare

Si consideri un fluido viscoso caratterizzato da un campo di velocità indipendente dal tempo, vale a dire in **condizioni di regime**, relativamente ad un ostacolo fisso costituito da un corpo rigido arbitrario ma prefissato. Si supponga che la velocità relativa tra il corpo e il fluido sia sufficientemente piccola da assicurare il **regime laminare**. In tali condizioni la forza di pressione, F_P , esercitata dal fluido che scorre sul corpo fermo, è uguale alla forza resistente, F_R , esercitata dal fluido fermo sul corpo che trasla, a parità di velocità relativa tra corpo e fluido, $F_P = F_R = F_v$.

In generale si trova che la forza passiva, dovuta all'attrito viscoso in regime laminare, è espressa da una relazione del tipo:

$$F_v = -k\eta\ell v \quad ; \quad (1)$$

dove k è un fattore di forma, dipendente dalla superficie del corpo a contatto con il fluido e dall'orientazione rispetto alla direzione di \vec{v} ; η è il coefficiente di viscosità dinamica del fluido; ℓ una dimensione tipica del corpo; v la velocità relativa tra corpo e fluido non perturbato.

Nel caso particolare della sfera si trova che $k = 6\pi$; $\ell = R$ essendo R il raggio della sfera; e la relazione precedente diviene:

$$F_v = -6\pi\eta Rv \quad ; \quad (2)$$

che è la **legge di Stokes**.

In conclusione, si può affermare che la forza resistente dovuta all'attrito viscoso, da parte di un fluido in regime laminare nei confronti di un corpo rigido in traslazione uniforme rispetto ad esso, risulta direttamente proporzionale alla velocità relativa tra corpo e fluido, a parità di altre condizioni.

Per definire i limiti di validità della legge di Stokes o più in generale della (1), da un punto di vista quantitativo, si definisce il **numero di Reynolds**:

$$\mathcal{R} = \frac{\rho\bar{v}\ell}{\eta} \quad ; \quad (3)$$

dove ρ è la densità del fluido e \bar{v} la velocità media del flusso in prossimità del corpo. Si vede sperimentalmente che la legge di Stokes è valida per valori del numero di Reynolds sufficientemente piccoli, $\mathcal{R} \lesssim 0.2$.

4 Moto rettilineo lungo un piano inclinato: fluido ambiente viscoso in regime laminare

Si consideri un carrello che scivola su una guida rettilinea inclinata di un angolo, θ , rispetto all'orizzontale, sotto l'azione di una forza motrice dovuta alla componente della gravità lungo la direzione del moto, cui si oppone una forza passiva dovuta all'attrito radente e/o volvente, esercitata dalle parti di sistema a contatto in moto relativo l'una rispetto all'altra, e una forza passiva dovuta all'attrito viscoso, esercitato dall'aria (in regime laminare) sulla superficie esterna del sistema in movimento.

Siano t_0 , s_0 , v_0 , i valori iniziali del tempo trascorso, dello spazio percorso², della velocità, rispettivamente. L'equazione del moto è fornita dalla seconda legge della dinamica, tenendo conto che nelle condizioni considerate il moto è rettilineo. Risulta pertanto:

$$mg(\sin \theta - k_R \cos \theta) - k'_v mv = ma \quad ; \quad (4)$$

$$k'_v m = k_v \quad ; \quad k_v = k\eta\ell \quad ; \quad (5)$$

essendo m la massa del carrello; g l'accelerazione di gravità locale; k_R il coefficiente di attrito radente³ e/o volvente⁴; k il coefficiente di forma del carrello;

²Preferiamo riferirci ai termini “tempo trascorso” e “spazio percorso” anziché ai termini “tempo” e “spazio” per una duplice ragione: in primo luogo, intendiamo i concetti di tempo e di spazio alla stregua di aspetti o proprietà del cosmo e non dei suoi costituenti; in secondo luogo, ogni considerazione cinematica o dinamica ha senso soltanto se riferita ad un sistema di assi arbitrario ma prefissato, tale da esprimere ogni punto del **continuum** spazio-temporale per mezzo di quattro coordinate: tre spaziali, riconducibili allo spazio percorso, e una temporale, riconducibile al tempo trascorso.

³In relazione a due corpi in moto relativo l'uno rispetto all'altro e a contatto su una superficie di scorrimento, il **coefficiente di attrito radente** è definito dal rapporto tra la forza resistente dovuta allo scorrimento e la componente, normale alla superficie di scorrimento, della forza che tiene i due corpi a contatto:

$$k_R = \frac{F_R}{F_N} \quad ; \quad F_R = k_R F_N \quad ;$$

conformemente alle leggi di Coulomb sulla forza d'attrito radente, la quale: 1) dipende linearmente dalla componente, normale alla superficie di scorrimento, della forza che tiene i due corpi a contatto; 2) è indipendente dall'estensione della superficie di scorrimento; 3) è indipendente dalla velocità relativa tra i due corpi. Le leggi menzionate non sono rigorose bensì approssimate, e il loro utilizzo è legato alla validità di particolari ipotesi restrittive. Nel caso particolare di un carrello che scivola su una guida rettilinea inclinata, $F_N = mg \cos \theta$, donde:

$$F_R = k_R mg \cos \theta \quad .$$

⁴In relazione a un corpo in rotolamento (senza strisciare) su una superficie, il **coefficiente di attrito volvente** è definito dal rapporto tra la forza resistente dovuta al

η il coefficiente di viscosità dinamica dell'aria; ℓ una dimensione tipica del carrello; v e a la velocità e l'accelerazione del carrello, rispettivamente; $\theta = 0$ in assenza di forza motrice.

Ai fini dell'integrazione, si effettua il cambiamento di variabile:

$$\phi = mg(\sin \theta - k_R \cos \theta) - k'_v mv \quad ; \quad \dot{\phi} = -k'_v ma \quad ;$$

e l'equazione di partenza diviene:

$$\phi = \frac{\dot{\phi}}{-k'_v} \quad ; \quad \dot{\phi} = -k'_v \phi = -\frac{\phi}{\tau_v} \quad ; \quad \tau_v = \frac{1}{k'_v} \quad ;$$

separando le variabili e integrando, si ha:

$$\frac{d\phi}{\phi} = -\frac{dt}{\tau_v} \quad ; \quad \log \frac{\phi}{\phi_0} = -\frac{t - t_0}{\tau_v} \quad ; \quad \phi = \phi_0 \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau_v}\right) \quad ;$$

la quale, tornando alla vecchia variabile, si scrive sotto la forma:

$$\begin{aligned} mg(\sin \theta - k_R \cos \theta) - k'_v mv &= [mg(\sin \theta - k_R \cos \theta) - k'_v mv_0] \times \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau_v}\right) \quad ; \\ \frac{g(\sin \theta - k_R \cos \theta)}{k'_v} - v &= \left[\frac{g(\sin \theta - k_R \cos \theta)}{k'_v} - v_0 \right] \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau_v}\right) \quad ; \end{aligned}$$

e quindi in definitiva:

$$v - v_0 = (v_\infty - v_0) \left[1 - \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau_v}\right) \right] \quad ; \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} v = v_\infty \quad ; \quad (6)$$

$$\tau_v = \frac{1}{k'_v} \quad ; \quad v_\infty = \frac{g(\sin \theta - k_R \cos \theta)}{k'_v} \quad ; \quad \frac{v_\infty}{\tau_v} = g(\sin \theta - k_R \cos \theta) \quad ; \quad (7)$$

rotolamento e la componente, normale alla superficie di rotolamento, della forza che tiene il corpo a contatto della stessa, moltiplicato per la distanza tra il baricentro del corpo e il centro istantaneo di rotazione:

$$k_V = r \frac{F_V}{F_N} \quad ; \quad F_V = \frac{k_V}{r} F_N \quad .$$

Nel caso particolare di un carrello che rotola (a mezzo di ruote cilindriche) su una guida rettilinea inclinata, $F_N = mg \cos \theta$, donde:

$$F_V = \frac{k_V}{r} mg \cos \theta = K_R mg \cos \theta \quad ; \quad K_R = \frac{k_V}{r} \quad ;$$

dove K_R si può interpretare alla stregua di un **coefficiente d'attrito radente efficace**.

dove τ_v ha le dimensioni di un tempo, mentre v_∞ rappresenta la velocità limite raggiunta dal carrello dopo aver coperto una distanza idealmente infinita. Ne discende che il prodotto, $v_\infty \tau_v$, ha le dimensioni di uno spazio percorso e il rapporto, $\frac{v_\infty}{\tau_v}$, ha le dimensioni di un'accelerazione.

Derivando membro a membro rispetto al tempo, si ottiene:

$$a = \frac{v_\infty - v_0}{\tau_v} \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau_v}\right) . \quad (8)$$

Tenendo conto della definizione di velocità istantanea, separando le variabili, e integrando membro a membro l'espressione risultante, si ha:

$$s = s_0 + v_\infty(t - t_0) - (v_\infty - v_0) \int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau_v}\right) dt ;$$

e quindi in definitiva:

$$s - s_0 = v_\infty(t - t_0) - (v_\infty - v_0)\tau_v \left[1 - \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau_v}\right)\right] . \quad (9)$$

Infine dalla sostituzione della (6) nella (9) si ottiene l'espressione della velocità in funzione dello spazio percorso e del tempo trascorso:

$$s = s_0 + v_\infty(t - t_0) - \tau_v(v - v_0) ;$$

e quindi in definitiva:

$$v - v_0 = v_\infty \frac{t - t_0}{\tau_v} - \frac{s - s_0}{\tau_v} . \quad (10)$$

Le (6), (8), (9), possono esprimersi sotto forma più compatta, in termini delle variabili ridotte:

$$\hat{t} = \frac{t - t_0}{\tau_v} ; \quad \hat{s} = \frac{s - s_0}{v_\infty \tau_v} ; \quad \hat{v} = \frac{v - v_0}{v_\infty} ; \quad \hat{a} = \frac{a \tau_v}{v_\infty} ; \quad (11)$$

in quanto tali, prive di dimensioni fisiche. Sostituendo le (11) nelle (6), (8), (9), si ottiene:

$$\hat{v} = \left(1 - \frac{v_0}{v_\infty}\right) [1 - \exp(-\hat{t})] ; \quad (12)$$

$$\hat{a} = \left(1 - \frac{v_0}{v_\infty}\right) \exp(-\hat{t}) ; \quad (13)$$

$$\hat{s} = \hat{t} - \left(1 - \frac{v_0}{v_\infty}\right) [1 - \exp(-\hat{t})] ; \quad (14)$$

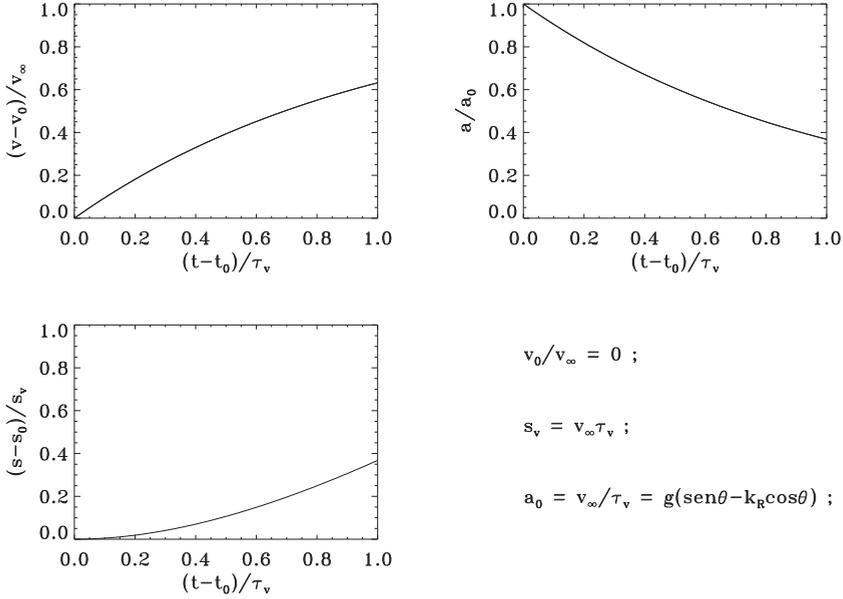


Figura 1. Dipendenza della velocità ridotta, \hat{v} , dell'accelerazione ridotta, \hat{a} , dello spazio percorso ridotto, \hat{s} , dal tempo trascorso ridotto, \hat{t} , nel dominio, $0 \leq \hat{t} \leq 1$, relativamente a un carrello che scivola su una guida rettilinea inclinata in corrispondenza a $\frac{v_0}{v_\infty} = 0$.

rispettivamente, la cui validità è universale per un fissato valore del rapporto, $\frac{v_0}{v_\infty}$.

Si osservi che assumere $t_0 = 0$, $s_0 = 0$, non lede la generalità della trattazione e, ai fini del problema considerato, si rende necessaria l'esistenza di una configurazione del sistema dove la velocità è nulla in presenza di forza motrice.

La dipendenza della velocità ridotta, \hat{v} , dell'accelerazione ridotta, \hat{a} , dello spazio percorso ridotto, \hat{s} , dal tempo trascorso ridotto, \hat{t} , nel dominio, $0 \leq \hat{t} \leq 1$, in conformità alle (12), (13), (14), rispettivamente, nel caso, $\frac{v_0}{v_\infty} = 0$, è rappresentata in Fig. 1.

Nel limite in cui l'attrito viscoso sia infinitesimo, $k_v \rightarrow 0$, donde $\tau_v \rightarrow +\infty$, $v_\infty \rightarrow +\infty$, si deve tenere presente che, nei grafici di Fig. 1, i punti al finito sono concentrati nell'origine mentre le curve rappresentano i punti all'infinito, dove il tempo trascorso è infinito dello stesso ordine di τ_v , lo spazio