MATEMATICHE COMPLEMENTARI

FONDAMENTI, STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA

20

MATEMATICHE COMPLEMENTARI

FONDAMENTI, STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA

La matematica altri non è che il lato esatto del nostro pensiero.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer

La collana è dedicata a studi e ricerche sui Fondamenti, sulla Storia e sulla Didattica della Matematica, dando rilievo agli aspetti culturali di questa disciplina, cogliendone le variegate espressioni e approfondendo la sua incidenza nella formazione umana e disciplinare. La collana, perciò, accoglie:

— studi sui Fondamenti della Matematica e la loro storia;
— ricerche di Storia della Matematica (sviluppo storico di idee e metodi, corrispondenze tra matematici, edizioni critiche di manoscritti, ecc...);
— proposte di percorsi dai contenuti storici a una loro riproposizione didattica;
— scritti di divulgazione dei contenuti matematici e della loro incidenza nello sviluppo di altre scienze;
— riflessioni sugli aspetti generali della Didattica della Matematica (dall'antropologia alle scienze psico-pedagogiche e alle neuroscienze);
— proposte di Didattica della Matematica relative a modalità differenti di attività didattiche in una classe di alunni;
— proposte di Didattica della Matematica con l'uso costante di nuove tecnologie.

Per l'eventuale inserimento in collana, ogni opera viene sottoposta alla valutazione del Comitato Scientifico e di esperti del settore, qualora necessario.

Classificazione Decimale Dewey:

510.7 (23.) MATEMATICA. Studio e insegnamento

Carlo **Dapueto**, Stefania **Delucchi**
Barbara **Mallarino**, Domingo **Paola**
Roberto **Pesce**, Fabrizio **Vannucci**, Nadia **Zamboni**

La "costruzione" del sapere matematico

Perché, cosa e come insegnare, oggi

aracne

aracne

ISBN
979–12–218–1343–2

PRIMA EDIZIONE
ROMA 5 LUGLIO 2024

Si chiede ai giovani di "inghiottire montagne di definizioni" dicendo loro «andate avanti! Vedrete poi a cosa tutto questo servirà»

…

Non far comprendere agli scolari il **perché** di un procedimento mi sembra una lacuna molto grave, "se è vero che ciò che nutre non è quello che si mangia ma solo quello che si digerisce"

Giovanni Prodi, *1965, Periodico di Matematiche*

INDICE

INTRODUZIONE

Questo manuale si differenzia dagli altri manuali di didattica della matematica per vari motivi.

1) È rivolto a un vasto pubblico di docenti, non solo ai ricercatori in didattica della matematica. Per questo usa un linguaggio non da "addetti ai lavori", presenta molti esempi, si occupa di tutti i temi e di tutti i livelli scolastici, curando gli intrecci tra i vari temi e i vari livelli.

2) È redatto da persone con diverse lauree di provenienza e con esperienze di insegnamento in tutti i livelli scolastici, dalla scuola elementare all'università.

3) È caratterizzato da una visione dell'insegnamento della matematica secondo la quale i vari temi devono essere disarticolati e riaggregati in itinerari didattici che ne colgano le interazioni, ne sfruttino le reciproche motivazioni e occasioni di consolidamento tecnico, realizzino economie e sinergie integrando argomenti matematici diversi.

4) Mira a mettere a fuoco le specificità della natura della matematica e dei suoi modelli rispetto alle altre discipline e agli altri aspetti conoscitivi, e la conseguente necessità di costruire gradualmente, con via via diversi livelli di "astrazione", il significato dei concetti matematici attraverso la costruzione di una rete complessa di riferimenti culturali ed esperienziali.

5) Per facilitare la lettura il manuale è di dimensioni contenute, presentando molti collegamenti a materiali in rete, che esemplificano le considerazioni svolte o suggeriscono approfondimenti, e che sono impiegabili liberamente da chi voglia usarli. I collegamenti sono via via illustrati nei vati capitoli.

Per comodità espositiva, dopo un capitolo iniziale sul concetto di "modello", dividiamo il manuale in tre fasce scolastiche, che non corrispondono necessariamente a diversi livelli di istruzione, i quali sono articolati in modi diversi nei vari paesi: 3-10 anni (capitolo 2), 11-16 anni (capitolo 3), 17-19 anni (capitolo 4).

Non ci sono grosse differenze tra i contenuti matematici affrontati in questi tre capitoli: cambia il livello di astrazione e di approfondimento, cambia il rapporto con le altre discipline che a loro volta cambiano via via la loro articolazione. L'idea è che chi insegna in una certa fascia scolastica debba avere ben presenti anche obiettivi e contenuti della fascia scolastica precedente e/o successiva, al fine di raccordare l'insegnamento tra i vari livelli. L'invito ai docenti è la lettura non solo del capitolo riferito alla propria fascia di insegnamento.

Buona lettura!

Carlo Dapueto, Stefania Delucchi, Barbara Mallarino
Domingo Paola, Roberto Pesce, Fabrizio Vannucci, Nadia Zamboni

Gruppo di Didattica della Matematica, Università di Genova
Indirizzo Email collettivo: macosa@dima.unige.it
o, via web: macosa.dima.unige.it/email.php

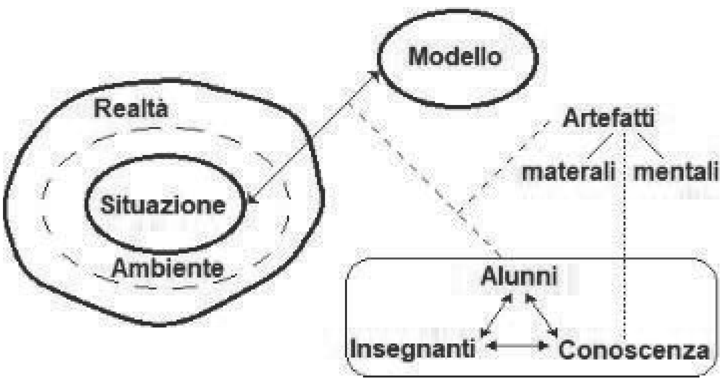
CAPITOLO I

IL CONCETTO DI MODELLO

La *matematica* può essere definita la *scienza dei modelli*. Il concetto di *modello* deve dunque avere un ruolo centrale nel suo insegnamento sin dai primi livelli.

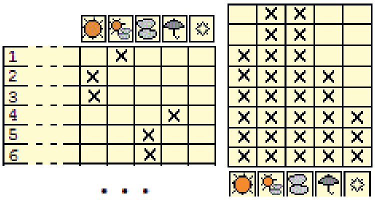
Il tema della modellizzazione accomuna tutte le forme di sapere; ciò offre numerose e feconde occasioni di interazioni tra l'insegnamento della matematica e quello delle *altre discipline.*

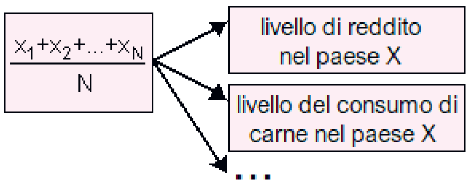
La figura seguente illustra il rapporto tra "**modello**" e "**realtà**". Data una situazione reale un modello ne è una rappresentazione semplificata che ne illustra alcuni aspetti, per certe finalità. A seconda delle finalità vi possono essere modelli differenti della stessa situazione (un modello di un aeroplano può avere la stessa forma e colore di un aereo vero ma non volare, o può non assomigliare ad un aereo vero ma volare). La "bontà" di un modello dipende dalla sua adeguatezza agli obiettivi per cui è stato costruito (per evidenziare meglio alcuni aspetti, per generalizzare alcune proprietà, per facilitare il confronto con altre situazioni modellizzate in modo analogo, …).



*La fase preliminare della modellizzazione circoscrive gli aspetti della **realtà** coinvolti nel problema che si vuole studiare.* Nella parte sinistra dello schema soprastante l'ambiente è la parte di realtà che viene isolata, non dettagliatamente, in questo modo, e la situazione è il complesso degli aspetti del fenomeno da modellizzare (incluse le assunzioni, le intuizioni, le percezioni, le intenzioni, … di chi costruisce il modello) di cui si vorrà tener conto nella rappresentazione. Sulla parte destra dello schema ci soffermeremo tra poco.

Lo ***stesso modello*** *può essere impiegato per rappresentare* ***situazioni diverse***. Un esempio molto semplice è costituito dal concetto di istogramma a crocette, che sin dalla scuola dell'infanzia può essere usato sia per confrontare le condizioni del tempo nei giorni di un mese che il modo in cui i bambini arrivano a scuola (a piedi, col bus o in auto). Ovvero si pensi al concetto di addizione, che può essere usato per indicare il valore complessivo di due quantità di denaro, la temperatura raggiunta dal termometro a partire da un certo valore dopo un certo aumento, il giorno del mese che dalla data odierna verrà raggiunto tra un certo numero di giorni, … Un altro esempio comune è il concetto di media aritmetica, che può essere usato per indicare, in un dato paese, il consumo pro-capite di carne, il reddito medio per famiglia, l'altezza media dei ventenni, …

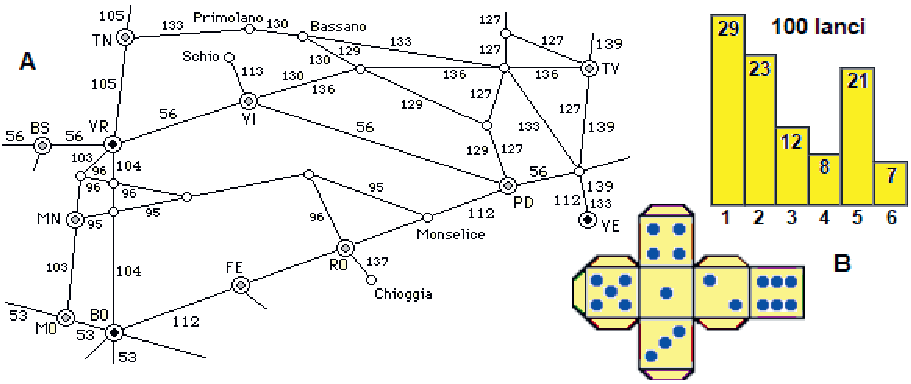




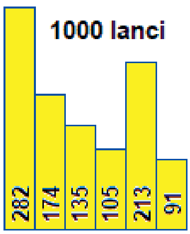
Infine un altro esempio riferito alla scuola di base è la diretta proporzionalità, che può essere impiegata per rappresentare la relazione che intercorre tra il peso di un prodotto alimentare e il suo costo, tra l'allungamento di una molla e il peso dell'oggetto ad esso appeso, tra le distanze in un percorso e quelle nella sua rappresentazione su una cartina, tra le distanze fra le parti di un'automobile e quelle fra le parti corrispondenti in un suo modellino…

E *una stessa situazione*, a seconda delle esigenze, *può essere rappresentata con* ***modelli diversi***. La figura seguente a sinistra riproduce parte dell'indice grafico stampato nella prima pagina di un orario ferroviario: è una cartina in cui sono riprodotte le linee ferroviarie e sono indicati i relativi quadri dell'orario; essa è un modello diverso da una usuale cartina geografica in quanto non rappresenta correttamente le distanze e le direzioni.

Vediamo un altro esempio, semplice, in cui affrontiamo un problema con due modellizzazioni matematiche differenti. Ho un dado costruito con del cartoncino come raffigurato sotto a destra. Con quale probabilità, se lo si lancia, esce un numero minore di 3? Affrontiamo il problema in *modo* ***empirico*** e in *modo* ***concettuale***.



Faccio 100 lanci e ottengo uscite che si distribuiscono come nell'istogramma sopra raffigurato. Posso concludere che la probabilità è circa 29+23 su 100, ossia circa 52%. Oppure posso ipotizzare che il dado sia ben equilibrato e ritenere che esca 1 o 2 in un terzo dei casi, concludendo che la probabilità è 1/3 = 33.3...%.



Il modello "concettuale" consente di trovare velocemente una risposta, però si basa sull'ipotesi che il dado sia perfettamente equilibrato (come non lo sono i dadi costruiti col cartoncino e neanche gli usuali dadi da gioco, in cui per esempio la faccia con "6" pesa meno della faccia con "1"). Il modello "empirico", basato sulla sperimentazione col "mio" dado, consentirebbe, avendo molto tempo a disposizione, di trovare una risposta più attendibile (vedi figura a lato); ma servirebbero gli strumenti probabilistici per valutarne la precisione.

Poi c'è un rapporto tra i due modelli: uso quello empirico per valutare la adeguatezza di quello concettuale. Insomma, l'uso della matematica non consiste nell'applicare brutalmente delle formule, ma comporta degli atteggiamenti culturali non "meccanici", e, al di là di questo esempio, è anche a ciò che deve educare la scuola, a partire dai primi livelli scolastici.

In molti casi occorre reinterpretare il modello verificandone l'adeguatezza a rappresentare il fenomeno studiato ed eventualmente precisare meglio la situazione da modellizzare.

Nello *schema raffigurato all'inizio del paragrafo* abbiamo messo una doppia freccia ***modello*** $\leftrightarrow$ ***situazione*** per evidenziare questo riadattamento.

Nello schema sono presi in esame non solo i rapporti modelli-realtà ma anche gli "strumenti" impiegati per costruire i modelli e come la loro messa a punto interagisca col processo educativo, ossia con gli *alunni*, i *docenti* e il complesso delle *conoscenze* (le discipline, le tecniche, …).

I ***modelli*** sono rappresentazioni astratte di oggetti o fenomeni ***reali***.

Oggetti o fenomeni reali che possono essere di tipo *materiale* (una rappresentazione topografica è il modello di un territorio), di tipo *sociale* (i concetti di "verbo", "sostantivo", ... sono dei modelli per rappresentare certi elementi della comunicazione verbale) o di tipo *astratto* (la "proprietà commutativa" è un modello nato per descrivere un aspetto di addizione e moltiplicazione, poi diventato una caratteristica che si è scoperta o si è voluta dare a nuovi oggetti matematici).

I modelli sono costruiti utilizzando ***artefatti cognitivi***, ossia "oggetti materiali" (carta, segni, suoni, colori, …) o "costruzioni artificiali" ad hoc (il linguaggio, i concetti, …) che l'uomo usa come protesi della sua mente. Il termine "cognitive artifact" fu introdotto da Donald Norman nel 1993 (Norman D.A., Things that Make us Smart, Wesley Publishing Company, Addison, 1993), mentre quello di "prosthesis tools" fu proposto da Jerome Bruner nel 1986 (Bruner J.S., Actual Minds, Possible Worlds, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1986).

La messa a punto degli artefatti cognitivi per modellizzare le situazioni non avviene episodicamente, ma in un contesto sociale di crescita culturale che viene via via ad organizzarsi in forme strutturate di conoscenza, che vengono trasmesse da una generazione all'altra attraverso processi educativi, in cui gli *alunni* e i *docenti* interagiscono tra loro e col *sapere*, quello in costruzione e quello consolidato. Queste reciproche interazioni sono descritte dal ***triangolo*** raffigurato in basso a destra nella *figura all'inizio del paragrafo.*

Quanto osservato sin qui vale per tutte le discipline e le forme organizzate di sapere. Ma la ***matematica*** ha la specificità di non essere caratterizzata da una particolare area di problemi o di fenomeni che cerca di modellizzare (come la fisica, la storia, la linguistica, …), bensì dalla *tipologia degli artefatti* che impiega per la costruzione dei modelli, e che vengono utilizzati in tutte le altre discipline. Quindi nello schema grafico iniziale (che di per sé è una semplificazione), *solo* al fine di rappresentare la situazione dell'insegnamento della matematica, è stato inserito un tratteggio verticale ***artefatti-conoscenza***: gli artefatti, per la matematica, presto, da strumenti conoscitivi diventano degli oggetti di conoscenza, da modelli che "astraggono" a partire da situazioni diventano man mano degli strumenti "concreti" per mettere a punto nuove astrazioni, in una spirale senza fine. Il sapere matematico, che *nasce dai contesti modellizzati*, *si organizza internamente* non *sulla base* di questi, ma *dei rapporti e delle analogie strutturali tra i suoi artefatti.* Naturalmente, nuovi contesti di matematizzazione e conseguenti nuovi utilizzi dei concetti possono influire, più o meno direttamente, su tale organizzazione interna.

Al riguardo Adrian Treffers (Three Dimensions, Reidel, 1987), poi ripreso anche da Hans Freudental (Revisiting Mathematics Education: China Lectures, Kluwer Academic Publishers, 1991), usa i termini "matematizzazione orizzontale" e "matematizzazione verticale" per indicare i due aspetti (ambito applicativo e organizzazione interna) che si intrecciano nello sviluppo, e nell'apprendimento, della matematica.

La situazione, poi, si fa più complessa in quanto sia il "triangolo", sia la tipologia degli "artefatti", con l'avvento dell'***informatica***, sono divenute più articolate: il software è diventato un interlocutore "animato" che interagisce tra i diversi soggetti, in modi molto diversi a seconda dell'uso che ne viene fatto e della consapevolezza con cui viene impiegato. Senza complicare ulteriormente la schematizzazione precedente, occorre tener presente che il software ha ora, e avrà sempre più, una incidenza decisiva sul modo in cui i diversi aspetti interagiscono tra di loro (vi sono molti lavori che sottolineano questo aspetto; citiamo solo il classico "Computer-Based Learning Enviroments in Mathematics" di Nicolas Balacheff e James J. Kaput, International Handbook of Mathematics Education, Kluwer, 1996).

Riassumendo, possiamo comunque dire che lo studio della matematica si articola nel rapporto (non lineare) tra *porsi problemi*, *modellizzare* le situazioni per affrontare la *soluzione* dei problemi, costruire e ricorrere a *teorie* che organizzano internamente i rapporti tra gli *artefatti* impiegati per la costruzione dei modelli e mettono a punto nuovi eventuali artefatti.

Tutto ciò rende cruciale, nell'educazione matematica, il **ruolo dell'insegnante**, che deve:

- progettare e curare percorsi didattici, e ambienti di apprendimento, che *diano concretezza ad artefatti* man mano più lontani da forme elementari di percezione,
- far emergere, attraverso forme non direttive di insegnamento, i *conflitti* realtà-concetti astratti, da quelli tra specchi "fisici" e specchi "matematici" (simmetrie) a quelli tra linguaggio "comune" e linguaggio "matematico", ad esempio quando si parla di lati di un angolo (che nel linguaggio corrente non sono illimitati) o di rettangoli e rombi (che nelle conversazioni non includono i quadrati), … e ai molti altri presenti sin dalle prime esperienze di insegnamento, che, se non esplicitati, rischiano di essere fonti di misconcezioni, mentre, se affrontati, sono un'occasione per trasformare una "opposizione distruttiva" in una "dialettica produttiva", che contribuisca a costruire un'*immagine adeguata della matematica* come disciplina,
- educare alla *scelta dei modelli* (non esiste "il" modello migliore) a seconda delle esigenze e delle "risorse" (artefatti fisici e concettuali) disponibili,
- organizzare l'insegnamento in modo che i riferimenti ad oggetti o situazioni reali non siano solo dei pretesti ma instaurino dei rapporti virtuosi con le conoscenze (e le motivazioni) extra-scolastiche degli alunni, *decentrando*, cercando di aver come riferimento non solo le proprie conoscenze e le proprie motivazioni ma, in un rapporto dialettico, anche quelle degli alunni,
- in questo, tener conto che l'apprendimento richiede una particolare disposizione al cambiamento (delle reti concettuali, dell'organizzazione delle proprie conoscenze ed esperienze) che in alcuni studenti, e nell'età dello sviluppo, può essere inconsapevolmente frenata, e che per essere riaccesa necessita, da parte dell'insegnante, della scelta di temi di lavoro che corrispondano a specifici interessi e di modalità di lavoro coinvolgenti e che favoriscano opportunamente i rapporti tra compagni non "omogenei",
- e dare *organicità alle conoscenze* da loro man mano acquisite in campo matematico (anche affiancando allo studio di *situazioni problematiche* la messa a punto - a partire da esse - di nuovi *concetti* e il consolidamento di alcune abilità operative attraverso opportuni *eserci-*

zi, che dipendono dal livello delle conoscenze e delle tecnologie storicamente disponibili) in modo che diventino un solido terreno di partenza per nuove astrazioni,

• tenendo conto che, specie nei primi livelli di istruzione, la costruzione di rapporti virtuosi con l'extra-scuola dipende anche dal coinvolgimento delle "*famiglie*": occorre farle partecipare "culturalmente" al progetto educativo che si sta portando avanti (partecipare "culturalmente" non vuol dire "fare i ripetitori", ma collaborare con i docenti nella costruzione di rapporti tra le attività scolastiche e la vita extrascolastica); questo è uno dei compiti più difficili; anche questo aspetto andrebbe opportunamente inserito nel "triangolo didattico" considerato sopra …

È solo dopo l'avvio della costruzione del significato della matematica come *scienza dei modelli* che l'insegnante può gradualmente costruire il significato delle ***definizioni*** e delle ***dimostrazioni*** in ambito matematico, mettendo a fuoco le differenze dagli altri significati che nel linguaggio comune hanno sia le *definizioni* (in un dizionario esse si basano su una banca di parole - the defining vocabulary - di cui non viene spiegato il significato) che le *dimostrazioni* (la dimostrazione della colpevolezza di un imputato è al di là di ogni "ragionevole" dubbio, non è "certa"). Ci soffermeremo in più punti sia sulle definizioni che sulle dimostrazioni, sottolineando come, sia per esigenze didattiche che per l'organizzazione stessa della disciplina, esse si mettano a punto, si costruiscano e si sistemino con livelli di approfondimento e di generalizzazione differenti.

Un ultimo aspetto che vogliamo sottolineare è quello dei ***limiti dei modelli***.

I modelli sono *rappresentazioni semplificate* che possono facilitare la comunicazione, il ragionamento, …, ma che possono trascurare o deformare degli aspetti che sono presenti nella cosa originale e che devono essere interpretate tenendo conto dei loro limiti: le riproduzioni cartografiche non rappresentano fedelmente le distanze (in quanto ottenute spiaccicando pezzi di sfera), le regole grammaticali perdono le "eccezioni", l'interpretazione che uno storico dà alle informazioni a disposizione su un certo evento è soggettiva e può differire da quelle di un altro storico, e … *le percentuali* facilitano il confronto tra le parti che compongono un totale ma, in cambio, perdono altre informazioni, i *valori medi* forniscono un'idea di come un certo fenomeno è diffuso in una popolazione ma non tengono conto delle differenze tra individuo e individuo, la presenza di una *dipendenza probabilistica* non deve essere confusa con la presenza di un legame di causa-effetto, ...

Questo è un aspetto, accennato anche in precedenza (quando abbiamo osservato che una stessa situazione può essere rappresentata con modelli diversi) e che viene ripreso anche nei capitoli successivi, a cui è assai importante dare rilievo nell'insegnamento.