



*Classificazione Decimale Dewey:*

**510 (23.) MATEMATICA**

ANTONIO CASERIO

# ARGOMENTI DI ARITMETICA



aracne



ISBN  
979-12-218-1310-4

PRIMA EDIZIONE  
**ROMA** 5 GIUGNO 2024

*A Giuliana,  
mia moglie*

Come la cresta di un  
pavone, come la gemma  
sulla testa di un serpente,  
così la matematica è alla  
testa di tutta la conoscenza.

*Vedanga - Jyotisa*  
India - 500 a. C. circa



## Indice

### 11 *Premessa*

### 13 Capitolo I

#### *La matematica*

1.1. La matematica, 13.

### 19 Capitolo II

#### *Una costruzione di Enrico e $\pi$*

2.1. Premessa 19 – 2.2. La costruzione, 19.

### 23 Capitolo III

#### *Un Presidente matematico*

3.1. Premessa, 23 – 3.2. Dimostrazione di Garfield del teorema di Pitagora, 24 – 3.3. Il teorema di Pitagora in Cina, 25.

### 27 Capitolo IV

#### *Elementi di teoria dei numeri*

4.1. Multipli e divisori di un numero naturale, 27 – 4.2. I criteri di divisibilità, 28 – 4.3. I numeri primi e la fattorizzazione, 34. 4.4. Il crivello di Eratostene, 39 – 4.5. Ricerca dei divisori di un numero, 42 – 4.6. I numeri primi di Fermat, 43 – 4.7. M. C. D. e m. c. m. di due o più numeri, 45.

4.7.1 – L’algoritmo di Euclide ha sempre termine, 48 – 4.7.2 – L’ultimo resto non nullo è il M. C. D., 48 – 4.8. Approfondimento sui divisori di un numero, 50 – 4.9. Esempi di esercizi, 51.

## 55 Capitolo V

### *Numeri figurati e progressioni aritmetiche*

5.1. Numeri triangolari e numeri quadrati, 55 – 5.2. Un po’ di storia, 59 – 5.3. Progressioni aritmetiche, 60 – 5.4 Somma di numeri quadrati, 62.

## 65 Capitolo VI

### *Quadrati magici*

6.1. Quadrati magici e pseudomagici, 65 – 6.2. Allenare la mente, 68.

## 69 Capitolo VII

### *I conigli di Fibonacci*

7.1. Le successioni, 69 – 7.2. Leonardo Pisano, 72.

## 73 Capitolo VIII

### *I cammelli e le frazioni egiziane*

8.1. Il problema, 73 – 8.2. Ricerca di sviluppi egizi, 76 – 8.3. Qualche approfondimento e curiosità, 79 – 8.4 Un nuovo metodo per gli sviluppi egizi (MFE), 80 – 8.5 Applicazione del metodo MFE, 82.

## 85 Capitolo IX

*Un po' di storia: I logaritmi di John Napier*

9.1. I logaritmi, 85 – 9.2. Alcune considerazioni, 93.

## 95 Capitolo X

*Ostilio Ricci, matematico fiorentino*

10.1. Nota biografica, 95 – 10.2. Frazioni di  $\pi$ , 98 – 10.3 Un problema di Ostilio Ricci, 99 – 10.4. Cenni storici sul numero  $\pi$ , 104.

## 107 Capitolo XI

*La moltiplicazione*

11.1. Premessa, 107 – 11.2. Moltiplicazione tradizionale o in colonna, 107 – 11.3 Moltiplicazione a scacchiera, 109 – 11.4. Moltiplicazione del contadino russo, 111 – 11.5 Qualche curiosità, 112 – 11.6. Giustificazione dell'algoritmo del contadino russo, 114 – 11.7. La moltiplicazione nell'insieme  $\mathbb{Z}$  dei numeri interi relativi, 115.

## 119 Capitolo XII

*Studio di un'equazione particolare*

12.1. Premessa, 119 – 12.2. Studio dell'equazione  $y^x = x^y$ , 119 – 12.3. Studio della curva parametrica, 121 – 12.4 Approfondimento, 123.

127     Capitolo XIII

*Numeri perfetti e numeri amicabili*

13.1. Premessa, 127 – 13.2. Numeri perfetti, 127 – 13.3. Alcune proprietà dei numeri perfetti, 128 – 13.4. Numeri amicabili (o amici), 129.

131     Capitolo XIV

*Il calendario, le classi di resto e le strutture*

14.1. Premessa, 131 – 14.2. Giorni della settimana dell'anno, 131 – 14.3. Due strutture algebriche molto importanti, 133 – 14.4. La prova del nove delle quattro operazioni, 138 – Importanza dell'Aritmetica, 144.

147     Capitolo XV

*Le equazioni diofantee*

15.1. Premessa, 147 – 15.2. Equazioni diofantee, 148 – 15.3. Risoluzione di un'equazione diofantea lineare, 148 – 15.4 Un altro esempio, 150 – 15.5. Un altro metodo per l'identità di Bézout, 151.

153     Capitolo XVI

*La scimmia e le noci di cocco*

16.1. Enigmi e giochi, 153 – 16.2. La scimmia e le noci di cocco, 153 – 16.3. Risoluzione dell'enigma, 154.

159     Appendice A

163     Bibliografia

## Premessa

Questo piccolo libro nasce dal desiderio di raccogliere alcuni articoli pubblicati nel *Notiziario dell'Istria* che il mio amico e compagno di studi ing. Sergio Moretti mi aveva chiesto per fare cosa gradita ai suoi lettori, periti industriali, ingegneri iscritti alla sua associazione *Amici dell'Istria*.

Nel libro sono presenti argomenti di varia matematica, soprattutto di aritmetica, derivanti per la maggior parte da un corso di aggiornamento per maestri.

È presente anche qualche argomento di aritmetica superiore di cui mi sono servito per affrontare e risolvere per diletto un celebre enigma.

Una sera seguendo la trasmissione Affari Tuoi su Rai 1 un giovane concorrente dovendo scegliere di aprire un pacco tra il numero sei e il numero tre scelse il tre dicendo che era un *numero perfetto*, è vero il contrario e non vinse niente. È pur vero che certi argomenti non vengono affrontati a scuola ma qualche volta è necessario chiarire i concetti, così un capitolo del libro è dedicato ai numeri perfetti.

In genere gli argomenti trattati sono accessibili ai lettori che hanno frequentato le scuole secondarie, in qualche caso però la trattazione è più approfondita.



## La matematica

### 1.1 La matematica

Alla civiltà greca, che per prima comprese l'intimo legame tra i fenomeni naturali e la matematica e che sentì la necessità di organizzare le conoscenze in un quadro logico e coerente, dobbiamo il nome della nostra scienza. Dal verbo greco *manthánein* (imparare) deriva, infatti, il sostantivo *to máthema* (lo studio, la conoscenza).

La matematica è la più antica di tutte le scienze. Si può quasi certamente affermare che l'uomo primitivo abbia iniziato a *fare matematica* prima ancora di inventare la scrittura, come forma di comunicazione permanente. Basti dire che nella Repubblica Ceca è stato ritrovato un osso di lupo (Fig. 1.1) risalente a circa



**Figura 1.1.** Osso di lupo.

30 000 anni fa, su cui sono state incise 55 tacche suddivise a gruppi di 5 (molto probabilmente ciò si spiega con il fatto che le dita di una mano sono cinque e con la necessità di contare più rapidamente la quantità rappresentata).

La nostra scienza nasce dal bisogno dell'uomo di risolvere problemi di qualsiasi natura (contare oggetti, misurare le distanze e l'estensione dei campi, fare previsioni e perfino giocare)<sup>1</sup>.

Proclo (410, 485 d. C.) filosofo e geometra alessandrino, conclude il *Commentario*, il primo trattato di storia della matematica, con questa definizione molto bella ed efficace:

«Questa, dunque, è la matematica: essa ti rammenta la forma invisibile dell'anima, essa dà vita alle sue stesse scoperte; essa risveglia la mente e purifica l'intelletto; essa porta luce alle nostre idee innate; essa annulla l'oblio e l'ignoranza che sono in noi fin dalla nascita». S'intuisce che per Proclo la matematica è astrazione, organizzazione e generalizzazione di idee innate nell'uomo.

Che la matematica sia il codice di lettura, la chiave per carpire i segreti della natura è stato messo in luce da autorevoli scienziati di tutte le civiltà, antichi e moderni. Citiamo, a proposito, qualche pensiero autorevole.

«Come la cresta di un pavone, come la gemma sulla testa di un serpente, così la matematica è alla testa di tutta la conoscenza». (*Vedanga Jyotisa* - India, 500 a. C. circa)

«L'enorme utilità della matematica nelle scienze naturali è qualcosa che rasenta il mistero» afferma il fisico Eugene Wigner nel celebre articolo *L'ingiustificata efficienza della matematica nelle scienze naturali*.

E ancora Stanislaw M. Ulam (1909 - 1984), un grande matematico del novecento, di origine polacca, nel libro autobiografico *Avventure di matematico* (Sellerio, Palermo) scriveva: «È per me ancora un'inesauribile fonte di sorpresa come poche righe su una

---

<sup>1</sup> I sacerdoti egizi e babilonesi sapevano prevedere con buona approssimazione le eclissi di sole e si servivano di questa loro abilità per acquisire potere sia agli occhi del faraone o re sia agli occhi del popolo.

lavagna o su un foglio di carta possano cambiare il corso degli eventi umani»<sup>2</sup>.

Il primo a comprendere la stretta corrispondenza tra matematica e natura è Galileo, il padre della scienza moderna, quando sostiene che:

«La Filosofia<sup>3</sup> è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi, io dico l'Universo, ma non si può intendere se prima non s'impara ad intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile ad intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.» (Galileo Galilei, *Il Saggiatore*, 1623).

Si può affermare senz'altro che quanto più in una disciplina compaiono termini e simboli matematici tanto più essa acquista le caratteristiche di “scienza”.

Qualche esempio al riguardo chiarirà meglio questo intenso legame.

1) *Matematica e previsione*. Il linguaggio matematico mette ordine e armonia tra i fenomeni naturali perché consente di espri-



**Figura 1.2.** James Clerk Maxwell.

---

<sup>2</sup> Ulam, naturalizzato statunitense, partecipò al progetto *Manhattan*, il programma attraverso cui gli Stati Uniti superarono i tedeschi nella corsa alla bomba atomica. Ebbe, anche, un ruolo di primo piano, come matematico, nella costruzione della prima bomba all'idrogeno.

<sup>3</sup> La Filosofia Naturale per Galileo è l'odierna Fisica.

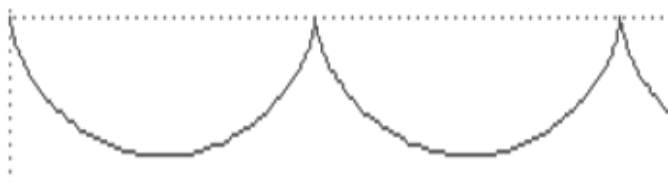
mere le leggi della fisica per mezzo di equazioni matematiche, ricavate dall'osservazione sperimentale e dalle relazioni esistenti tra insiemi di dati significativi. In tre eleganti *equazioni differenziali* il fisico scozzese James Clerk Maxwell, nella seconda metà dell'ottocento, riassunse tutte le leggi dell'elettricità e del magnetismo, fondando l'elettromagnetismo.

La teoria di Maxwell prevedeva l'esistenza delle onde elettromagnetiche (a esempio i segnali radio) che furono scoperte solo verso la fine dell'ottocento dal fisico tedesco Heinrich Hertz<sup>4</sup>.

II) *Matematica e invenzione*. Il fisico e matematico Christiaan Huygens (1629 - 1695), detto l'orologiaio di Amsterdam, costruì il primo orologio a pendolo utilizzando una proprietà della *cicloide ordinaria*, la curva piana che è descritta da un punto appartenente alla circonferenza di un cerchio, che rotola in linea retta senza strisciare<sup>5</sup> (Fig. 1.3).

Questa stretta connessione tra realtà e matematica è chiaramente evidenziata nella premessa al Programma Ministeriale di Matematica della scuola elementare:

«L'educazione matematica contribuisce alla formazione del pensiero nei suoi vari aspetti di intuizione, di immaginazione, di progettazione, di ipotesi e deduzione, di controllo e quindi di ve-



**Figura 1.3.** Cicloide capovolta.

<sup>4</sup> In onore di questo fisico, vincitore del premio Nobel per tale scoperta, l'unità di misura della frequenza di un moto periodico si chiama Hertz, simbolo Hz.

<sup>5</sup> La proprietà è quella della *tautocronia* (stesso tempo): disposta la cicloide ordinaria su un piano verticale con il vertice nella posizione più bassa (cioè capovolta), un punto pesante che parte, senza velocità iniziale, da un punto qualunque del suo arco, impiega sempre lo stesso tempo per giungere al vertice (Fig. 1.3). Per questa proprietà le piccole oscillazioni del pendolo avvengono nello stesso tempo e l'orologio è più preciso.

rifica o di smentita. Essa tende a sviluppare in modo specifico concetti, metodi e atteggiamenti utili a produrre le capacità di ordinare, quantificare e misurare fatti e fenomeni della realtà e a formare le abilità necessarie per interpretarla criticamente e per intervenire su di essa»<sup>6</sup>.

Possiamo sintetizzare la situazione nel diagramma (Fig. 1.4.) L'interazione tra realtà e matematica è continua e profonda. A partire da una situazione concreta l'uomo è capace di ricavare una o più leggi che la descrivono compiutamente (processo di astrazione). Le leggi trovate si rivelano idonee, poi, allo studio e all'analisi di situazioni analoghe a quella iniziale (processo di applicazione o *transfert*). Non è infrequente il caso in cui oggetti matematici studiati, per puro diletto, anni o addirittura secoli prima, sia risultati adatti ad illustrare fenomeni fisici scoperti successivamente.

Le coniche (parabola, ellisse<sup>7</sup>, iperbole) scoperte e studiate da Apollonio da Perga (III secolo a. C.) sono state utilizzate nel seicento da Galileo per interpretare il moto dei proiettili (parabola) e da Keplero e Newton per il moto dei pianeti intorno al sole (ellisse).

I numeri *primi*, le cui principali proprietà erano già note ai Greci e che rappresentano quanto di più *puro* esista in matematica, sono oggi usati per misurare la velocità dei computer o per ideare codici di sicurezza per lo scambio di informazioni segrete. Allo scopo si utilizzano numeri primi con più di cento cifre.



**Figura 1.4.** Interazione tra matematica e realtà.

<sup>6</sup> MPI, Programmi didattici del 1985 per la scuola primaria.

<sup>7</sup> La circonferenza è un'ellisse particolare.



## Una costruzione di Enrico D'Ovidio e $\pi$

### 2.1. Premessa

L'insegnamento della geometria razionale nella scuola attuale è talmente ridotto che difficilmente il docente affronta il classico problema della quadratura del cerchio. Tuttavia egli, se volesse approfondire l'argomento, potrebbe presentare agli studenti una costruzione geometrica del grande matematico campobassano Enrico D'Ovidio, semplice e ingegnosa, che fornisce un quadrato la cui area approssima grandemente quella di un dato cerchio. Infatti, come è noto il problema non si può risolvere esattamente con riga e compasso.

La costruzione è esposta nel testo *Elementi di Geometria*<sup>1</sup> che D'Ovidio pubblicò nel 1869, assieme al matematico molisano Achille Sànnia, e per la sua originalità è riportata anche nella celebre enciclopedia *Questioni riguardanti le matematiche complementari* di Federigo Enriques.

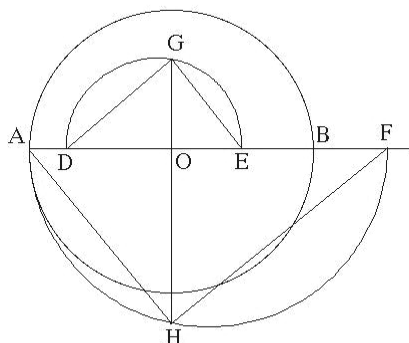
### 2.2. La costruzione

Sul diametro  $AB$  di un cerchio dato (Fig. 2.1), si riporti il segmento  $OD = \frac{3}{5}AO$  e dalla parte opposta il segmento  $OF =$

---

<sup>1</sup> Questo testo di geometria elementare per i licei ebbe 14 edizioni e rimase in adozione per oltre 50 anni nelle scuole italiane. Esso nella sua XII edizione, 1906, si può consultare presso la Biblioteca "P. Albino" di Campobasso.

$\frac{3}{2}AO$  Sia  $E$  il punto medio di  $OB$ . Si descrivano, da bande opposte rispetto ad  $AB$  i semicerchi di diametro  $DE$  e  $AF$ . Si conduca per  $O$  la perpendicolare ad  $AB$  che incontri i due semicerchi nei punti  $G$  e  $H$ . Ebbene il segmento  $GH$  è il lato del quadrato richiesto.



**Figura 2.1.** Costruzione di D'Ovidio.

*Dim.* Posto  $AO = r$ , per la costruzione fatta, si ha:  $OF = \frac{3}{2}r$ ,  
 $OD = \frac{3}{5}r$ ,  $OE = \frac{1}{2}r$ . Dai triangoli  $DGE$  e  $AHF$  rettangoli  
(perché inscritti in semicerchi) abbiamo rispettivamente, per il 2°  
teorema di Euclide, le due proporzioni:  $OE:OG = OG:DO$  e  
 $AO:OG = OG:DO$ . Da queste ricaviamo:  $OG = r\sqrt{\frac{3}{10}}$  e  
 $OH = r\sqrt{\frac{3}{2}}$  e, quindi:

$$GH = GO + OH = r \left( \frac{\sqrt{30} + \sqrt{150}}{10} \right) \approx r \cdot 1,7724674 \dots$$

E poiché il lato del quadrato equivalente al cerchio dato è  
 $r\sqrt{\pi} \approx r \cdot 1,7724538 \dots$ ,  $GH$  differisce da esso, per eccesso,  
per meno di  $\frac{2}{100000}r$ , dato che