Curatore: Prof.ssa Florinda Capone.
Collaboratori: Chiara Accarino, Giuseppe Arnone, Ludovica Fiorentino, Jacopo A. Gianfrani, Francesco Iovanna, Giuliana Massa.

Edizioni precedenti: *prima* (1973), *seconda* (1976), *terza* (1988)
Liguori Editore

Parole chiave
Fisica Matematica
Meccanica Classica
Elementi di Relatività Ristretta
Elementi di Meccanica dei Continui

Keywords
Mathematical Physics
Classical Mechanics
Elements of Special Relativity
Elements of Continuum Mechanics

Classificazione Decimale Dewey:

531.0711 (23.) MECCANICA CLASSICA MECCANICA DEI SOLIDI. Educazione superiore

SALVATORE RIONERO

LEZIONI DI MECCANICA RAZIONALE

NUOVA EDIZIONE

Prefazione di

FLORINDA CAPONE

aracne

ISBN
979–12–218–0810–0

QUARTA EDIZIONE
ROMA 19 LUGLIO 2023

Alla memoria di mio padre

INDICE

PREFAZIONE

Sono trascorsi circa trent'anni dall'ultima edizione del libro "Lezioni di Meccanica Razionale" di Salvatore Rionero. Pur essendo passati molti anni dalla sua scrittura - la prima edizione risale al 1973 - esso, fatta eccezione per la veste grafica, non ha subito un processo, si direbbe, di invecchiamento; al contrario esso ha costituito, e continua attualmente a costituire, un prezioso strumento didattico per i corsi di base di Fisica Matematica e Meccanica Razionale.
I contenuti sono rimasti immutati nella loro struttura e in questa riedizione appaiono in una nuova veste digitalizzata di più agevole lettura rispetto alla precedente versione dattiloscritta. Sono stati inoltre corretti i refusi precedentemente riportati nell'errata corrige, che appariva in appendice all'ultima edizione del 1988.
Il pregio che caratterizza questo libro è il suo approccio fondazionale alla Meccanica Razionale, nonché il suo carattere autoconsistente e di ampio respiro didattico. In questo spirito, il testo, passando attraverso una rigorosa analisi dello spazio fisico della Meccanica e per lo studio della Cinematica e della Dinamica, propone un'introduzione coerentemente contestualizzata alla Meccanica dei Continui, alla Dinamica dei Fluidi fino alla Relatività Ristretta.

Colgo l'occasione per ringraziare calorosamente la famiglia del Professore Salvatore Rionero per aver reso possibile la ristampa di questo libro.

Considero questo un omaggio al mio Maestro, perché la sua voce scientifica continui a circolare e ispirare generazioni di studenti e futuri ricercatori.

Napoli, Aprile 2023
Florinda Capone

Parte I

TEORIE INTRODUTTIVE

1 ALGEBRA DEGLI SPAZI VETTORIALI

1.1 SPAZI VETTORIALI

1.1.1 *Proprietà elementari degli spazi vettoriali. Esempi*

Sia E un insieme di infiniti elementi di natura qualsiasi, rappresentati con le lettere latine in grassetto, ed $\mathbb{R}$ il campo dei numeri reali.

Definizione 1.1. Si dice che E è uno *spazio vettoriale* reale ed i suoi elementi chiamansi *vettori*, se esistono due leggi di composizione, una interna definita in $E \times E$ ed a valori in E (*addizione*) e l'altra esterna definita in $\mathbb{R} \times E$ ed a valori in E (*moltiplicazione* per un numero reale), tali che

i) indicato additivamente con $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ e detto *somma* l'elemento che la legge di composizione interna associa alla coppia $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E \times E$, sussistono – $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E$ – le proprietà:

$$\begin{cases} \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} \\ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \\ \exists \mathbf{0} \in E \ : \ \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x} \\ \forall \mathbf{x} \in E, \ \exists \mathbf{x}' \in E \ : \ \mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{0} \end{cases} \tag{1.1}$$

ii) indicato moltiplicativamente e detto *prodotto* di a per $\mathbf{x}$ il vettore che la legge di composizione esterna associa alla coppia $(a, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times E$ sussistono – $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ – le proprietà:

$$\begin{cases} 1\mathbf{x} = \mathbf{x} \\ a(b\mathbf{x}) = (ab)\mathbf{x} \\ (a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x} \end{cases} \tag{1.2}$$

Il vettore $\mathbf{0}$ neutro rispetto all'addizione ed il vettore $\mathbf{x}'$, associato ad ogni dato vettore $\mathbf{x}$ a norma della $(1.1)_4$, come subito si verifica, sono unici. Il primo dicesi *vettore nullo* e senza che ciò crei equivoci, s'indica con lo zero di $\mathbb{R}$; il secondo dicesi *opposto* di $\mathbf{x}$ e s'indica con $-\mathbf{x}$. La somma di un vettore $\mathbf{x}$ e dell'opposto di un'altro $\mathbf{y}$, dicesi *differenza* tra $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$ e s'indica con $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.

Un vettore $\mathbf{y}$ dicesi *parallelo* (o *collineare*) ad un vettore $\mathbf{x}$ se $\mathbf{y} = m\mathbf{x}$ e, precisamente, *parallelo e concorde* se $m \geq 0$, *parallelo e discorde* se $m \leq 0$.

Si deducono poi agevolmente – $\forall \mathbf{x} \in E$ e $\forall a \in \mathbb{R}$ – le proprietà elementari:

$$\begin{cases} 0\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad a\mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad (-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}, \quad a(-\mathbf{x}) = -a\mathbf{x} \\ \\ a\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies a = 0 \text{ oppure } \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{1.3}$$

che unite alle (1.1)-(1.2) mostrano che in uno spazio vettoriale valgono le regole dell'algebra ordinaria.

L'insieme $\mathbb{R}^n$ delle n-ple ordinate di numeri reali $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ – ove in x^i, i funziona da indice e non da esponente – assume la struttura *naturale* di spazio vettoriale reale non appena si definiscano la somma e il prodotto ponendo:

$$\begin{cases} \mathbf{x} + \mathbf{y} = (x^1, x^2, \ldots, x^n) + (y^1, y^2, \ldots, y^n) = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \ldots, x^n + y^n) \\ \\ a\mathbf{x} = a(x^1, x^2, \ldots, x^n) = (ax^1, ax^2, \ldots, ax^n) \end{cases} \tag{1.4}$$

Altri esempi si ottengono considerando l'insieme dei numeri complessi o l'insieme delle funzioni reali definite e limitate in un intervallo. Basta adottare come leggi di composizione l'addizione ordinaria e la moltiplicazione ordinaria per un numero reale perché tali insiemi assumano la struttura di spazi vettoriali reali.

Se la legge di composizione esterna è definita in $K \times E$, K essendo un campo qualsiasi, E dicesi spazio vettoriale su K. Noi ci riferiremo in seguito solo a spazi vettoriali reali e per tale motivo, spesso, sott'intenderemo la qualifica di reale.

1.1.2 *Dimensione e basi di uno spazio vettoriale*

In uno spazio vettoriale E, n vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ diconsi *linearmente indipendenti* se – indicate con a^i delle costanti reali –

$$a^1\mathbf{x}_1 + a^2\mathbf{x}_2 + \ldots + a^n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \implies a^1 = a^2 = \ldots = a^n = 0 \tag{1.5}$$

in caso contrario diconsi *linearmente dipendenti*.
Un sistema di vettori contenente vettori linearmente dipendenti è linearmente dipendente e, pertanto, se n vettori sono linearmente indipendenti anche m qualsiasi tra essi lo sono e, in particolare, nessuno di essi è nullo. In uno spazio vettoriale possono presentarsi i seguenti due casi: 1) comunque si fissi un intero n, esistono n vettori linearmente indipendenti; 2) esiste un numero n tale che esistano almeno n vettori linearmente indipendenti ma è linearmente dipendente ogni sistema di $n + 1$ vettori.
Nel primo caso E dicesi *ad infinite dimensioni*, nel secondo invece dicesi *ad n dimensioni* e s'indica con E_n, il massimo n per l'ordine dei sistemi indipendenti costituendo la *dimensione* di E, ed ogni sistema di n vettori indipendenti dicesi *base* di E. Noi, qui e nel seguito, *prenderemo in esame solo spazi ad un numero finito di dimensioni*.

Proprietà 1.1. In uno spazio vettoriale E, n vettori costituiscono una base se e solo se ogni vettore si esprime in uno ed un solo modo come loro combinazione lineare.

Se $\{\mathbf{e}_i\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ è una base di E, il sistema $(\mathbf{x}_1, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ – $\forall \mathbf{x} \in E$ – è linearmente dipendente onde:

$$\lambda \mathbf{x} + a^1 \mathbf{e}_1 + \ldots + a^n \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

con $\lambda, a^1, \ldots, a^n$ costanti, non tutte nulle, associate ad $\mathbf{x}$. Anzi, l'indipendenza dei vettori $\mathbf{e}_i$ implica $\lambda \neq 0$, onde:

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + \ldots + x^n \mathbf{e}_n \qquad x^i = -\tfrac{a^i}{\lambda}$$

I coefficienti x^i sono poi univocamente determinati giacché se fosse anche $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n y^i \mathbf{e}_i$, per differenza seguirebbe, $\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$, il che, per l'indipendenza dei vettori $\mathbf{e}_i$ implicherebbe $x^i = y^i\ \forall i$. La condizione è dunque necessaria e non resta che provarne la sufficienza.

Sia $(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)$ un sistema di n vettori tali che per ogni vettore $\mathbf{x} \in E$ esistano n costanti reali λ^i $(i = 1, \ldots, n)$ univocamente determinate, tali che:

$$\mathbf{x} = \lambda^1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \lambda^2 \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \ldots + \lambda^n \boldsymbol{\varepsilon}_n \tag{1.6}$$

Poiché il vettore nullo si ottiene per, e solo per, $\lambda^1 = \lambda^2 = \cdots = \lambda^n = 0$, i vettori $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ sono indipendenti e pertanto resta da provare che non esistono sistemi indipendenti costituiti da $n+1$ vettori. Ciò, d'altra parte, segue dal fatto che comunque si prendano $n+1$ vettori $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n+1})$, se n fra essi – ad es. i primi n – fossero indipendenti, esisterebbero, per la (1.6), n^2 costanti a_i^j con $\det \|a_i^j\| \neq 0$ tali che il sistema:

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^n a_i^j \boldsymbol{\varepsilon}_j \qquad i = 1, \ldots, n$$

sarebbe invertibile e, per la (1.6), il generico vettore $\mathbf{x}$ e quindi anche $\mathbf{u}_{n+1}$ sarebbe esprimibile come combinazione lineare di $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Come applicazione della proprietà precedente, si ricava subito che lo spazio $\mathbb{R}^n$ ha n dimensioni. Infatti, stanti le (1.4), qualunque sia $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ si ha univocamente $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x^i \mathbf{e}_i$ con:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ \ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ \ \ldots, \ \ \mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1) \tag{1.7}$$

donde la dimensione è n ed i vettori (1.7) costituiscono una base (*base canonica*) di $\mathbb{R}^n$.

1.1.3 *Cambiamenti di base in E_n. Legge di controvarianza*

Definizione 1.2. Diconsi *componenti controvarianti* di un vettore $\mathbf{x}$ in una base $\{\mathbf{e}_i\}$, i numeri x^i, univocamente determinati, tali che:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x^i \mathbf{e}_i \tag{1.8}$$

e la (1.8) dicesi *decomposizione* del vettore $\mathbf{x}$ secondo la base $\{\mathbf{e}_i\}$.

Indicate con $\{\mathbf{e}_i\}$ e $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ due basi di E_n e con $A_i^{i'}$ le componenti di $\mathbf{e}_i$ in $\{\mathbf{e}_{i'}\}$, si ha la *legge di trasformazione delle basi* cioè:

$$\mathbf{e}_i = \sum_{i'=1}^{n} A_i^{i'} \mathbf{e}_{i'} \tag{1.9}$$

Definizione 1.3. La matrice $\|A_i^{i'}\|$ (ove l'indice superiore è di riga), dicesi *matrice del cambiamento di base* (1.9) ed il determinante $\Delta = \det\|A_i^{i'}\|$ dicesi *modulo* del cambiamento di base.

Si noti che, per l'indipendenza dei vettori $\mathbf{e}_{i'}$, è $\Delta \neq 0$, cioè la matrice $\|A_i^{i'}\|$ è regolare.

Indicate con $A_{i'}^{i}$ le componenti di $\mathbf{e}_{i'}$ in $\{\mathbf{e}_i\}$, la trasformazione inversa della (1.9) è:

$$\mathbf{e}_{i'} = \sum_{i=1}^{n} A_{i'}^{i} \mathbf{e}_i \tag{1.10}$$

ove la matrice $\|A_{i'}^{i}\|$ è l'inversa di $\|A_i^{i'}\|$ il che, introdotto il *simbolo di Kronecker*:

$$\delta_i^k = \begin{cases} 0 & \text{se } \; i \neq k \\ 1 & \text{se } \; i = k \end{cases} \tag{1.11}$$

si scrive:

$$\sum_{h'=1}^{n} A_i^{h'} A_{h'}^{k} = \delta_i^k \tag{1.12}$$

Un vettore $\mathbf{x}$, essendo un ente intrinseco, non vara al variare delle basi. Variano invece le sue componenti e se x^i sono quelle in $\{\mathbf{e}_i\}$ ed $x^{i'}$ quelle in $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ da:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \mathbf{e}_i = \sum_{i'=1}^{n} x^{i'} \mathbf{e}_{i'} \tag{1.13}$$

per la (1.10) segue:

$$\left(x^i - \sum_{i'=1}^{n} A_{i'}^{i} x^{i'} \right) \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$$

e, per l'indipendenza dei vettori $\mathbf{e}_i$:

$$x^i = \sum_{i'=1}^{n} A_{i'}^{i} x^{i'} \tag{1.14}$$

Il confronto tra la (1.9) e la (1.14) mostra che, mentre il passaggio dalla base $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ alla base $\{\mathbf{e}_i\}$ è retto dalla matrice $\|A_i^{i'}\|$, quello dalle *componenti* $x^{i'}$ alle x^i è retto dalla matrice inversa. È per tale motivo che alle componenti x^i si dà la qualifica di *controvarianti* e la (1.14) dicesi *legge di controvarianza*. Le inverse delle (1.14) sono poi, ovviamente, le:

$$x^{i'} = \sum_{i=1}^{n} A_i^{i'} x^i \tag{1.15}$$

Dalla legge di controvarianza seguono immediatamente le:

Proprietà 1.2. Un vettore $\mathbf{x}$ è completamente caratterizzato dalle sue componenti su una prefissata base e dalla legge con cui queste si trasformano.

Proprietà 1.3. Condizione necessaria e sufficiente affinché sia:

$$\mathbf{x} = \sum_{h=1}^{n} \lambda^h \mathbf{y}_h \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y}_h \in E_n,\ \lambda^h \in \mathbb{R} \tag{1.16}$$

è che esista una base $\{\mathbf{e}_i\}$ di E_n tale che – indicata con x^i ed y_h^i le componenti di $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}_h$ in $\{\mathbf{e}_i\}$ – si abbia:

$$x^i = \sum_{h=1}^{n} \lambda^h y_h^i \qquad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \tag{1.17}$$

1.1.4 *Convenzione sugli indici ripetuti*

Nei numeri precedenti si è presentata ripetutamente la presenza di sommatorie effettuate rispetto ad un indice ripetuto che figura una volta come indice superiore ed una volta come indice inferiore. Poiché tale circostanza ricorre sovente, per alleggerire le notazioni, si applica la seguente *convenzione di Einstein*:

Ogni qualvolta in un monomio compare due volte lo stesso indice, una volta come indice superiore ed una volta come indice inferiore, si deve sottintendere il segno di sommatoria rispetto a quell'indice.

Seguendo la convenzione precedente le (1.9), (1.10), (1.12), (1.14) e (1.15) si scrivono, ad esempio, rispettivamente:

$$\mathbf{e}_i = A_i^{i'} \mathbf{e}_{i'}, \quad \mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^{i} \mathbf{e}_i, \quad A_i^{h'} A_{h'}^{k} = \delta_i^k, \quad x^i = A_{i'}^{i} x^{i'}, \quad x^{i'} = A_i^{i'} x^i \tag{1.18}$$

Un *indice* ripetuto dicesi *muto o saturato* e, ovviamente, si può indicare con una lettera qualsiasi; gli indici non muti diconsi *liberi*.

Ad esempio, nella $(1.18)_1$, i' è muto ed i è libero e si può anche scrivere $\mathbf{e}_i = A_i^{h'} \mathbf{e}_{h'}$.

Nell'applicare la convezione di Einstein occorre tener conto delle seguenti precauzioni:

1) *Non ripetere gli indici muti*. Ad esempio, la scrittura $A_j^i B x^i$ non ha senso;

2) *Se si vuole indicare che il prodotto $A^i B_j$ vale 1 quando i e j sono uguali, occorre scrivere esplicitamente: $A^i B_j = 1$ per $i = j$ e non $A^i B_i = 1$ che significa invece* $\sum_{i=1}^{n} A^i B_i = 1$. Ad esempio, di tale precauzione si è già tenuto conto nella (1.12).

1.1.5 *Sottospazi. Sottospazi supplementari*

Definizione 1.4. Ogni parte non vuota V di uno spazio vettoriale E_n dicesi *sottospazio* di E_n se:

$$\begin{cases} \mathbf{x} \in V,\ \mathbf{y} \in V \implies \mathbf{x} + \mathbf{y} \in V \\ \\ \mathbf{x} \in V,\ a \in \mathbb{R} \implies a\mathbf{x} \in V \end{cases} \tag{1.19}$$

In particolare, per $a = 0$, la $(1.19)_2$ implica che ogni sottospazio contiene il vettore nullo. Si verifica poi subito che *ogni sottospazio V di E_n, quando si adottano in V le stesse leggi di composizione di E_n, assume la struttura di spazio vettoriale*.

Proprietà 1.4. L'insieme delle combinazioni lineari di r vettori indipendenti è un sottospazio ad r dimensioni.

Sia V l'insieme dei vettori $\mathbf{x} \in E_n$ tali che:

$$\mathbf{x} = a^1\mathbf{u}_1 + a^2\mathbf{u}_2 + \ldots + a^r\mathbf{u}_r \tag{1.20}$$

con $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ vettori indipendenti e con $a^i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$. Ovviamente sono soddisfatte le (1.19), V ha dimensione r ed $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r)$ ne è una base [cfr. Proprietà 1.1]. Dalla proprietà precedente segue che ogni vettore $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ genera, per combinazione lineare, un sottospazio ad 1 dimensione costituito dai vettori di E_n collineari ad $\mathbf{x}$, cioè del tipo $a\mathbf{x}$, $\forall a \in \mathbb{R}$; due vettori non collineari $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$ generano un sottospazio a due dimensioni e così via.

Definizione 1.5. Due sottospazi E_p ed E_q di E_n diconsi *supplementari* se:

$$\begin{cases} E_p \cap E_q = \{\mathbf{0}\} \\ \\ p + q = n \end{cases} \tag{1.21}$$

Proprietà 1.5. Se E_p ed E_q sono sottospazi supplementari di E_n, ogni vettore $\mathbf{x}$ di E_n può decomporsi univocamente nella somma di un vettore di E_p e di uno di E_q.

Se $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p)$ è una base di E_p e $(\boldsymbol{\varepsilon}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)$ è una base di E_q, $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)$ è una base di E_n. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} &a^1\mathbf{e}_1 + \ldots + a^p\mathbf{e}_p + b^{p+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{p+1} + \ldots + b^n\boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{0} \iff \\ &a^1\mathbf{e}_1 + \ldots + a^p\mathbf{e}_p = -b^{p+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{p+1} - \ldots - b^n\boldsymbol{\varepsilon}_n \in E_p \cap E_q \end{aligned}$$

il che implica $a^1 = a^2 = \ldots = a^p = b^{p+1} = \ldots = b^n = 0$. Qualunque sia poi $\mathbf{x} \in E_n$ – indicate con $(\lambda^1, \ldots, \lambda^p, \gamma^{p+1}, \ldots, \gamma^n)$ le sue componenti in $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)$ – si ha la decomposizione $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ con $\mathbf{x}_1 = \lambda^1\mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda^p\mathbf{e}_p \in E_p$, $x_2 = \gamma^{p+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{p+1} + \ldots + \gamma^n\boldsymbol{\varepsilon}_n \in E_q$ ed essa è unica giacché se fosse anche $\mathbf{x} = \mathbf{x}'_1 + \mathbf{x}'_2$ – con $\mathbf{x}'_1 \in E_p$ e $x'_2 \in E_q$ – per differenza seguirebbe:

$$(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}_1) + (\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0} \iff E_p \ni \mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'_2 \in E_q$$

onde $\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}'_2 = \mathbf{x}_2$.

1.1.6 *Applicazioni lineari tra spazi vettoriali*

Definizione 1.6. Un'applicazione τ, di uno spazio vettoriale E in uno spazio vettoriale H, che soddisfi le condizioni:

$$\begin{cases} \tau(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \tau(\mathbf{x}_1) + \tau(\mathbf{x}_2) \qquad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E \\ \tau(a\mathbf{x}) = a\tau(\mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x} \in E,\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.22}$$

dicesi *applicazione lineare* di E in H e, in particolare, *endomorfismo* di E per $H = E$ e *forma lineare* su E per $H = \mathbb{R}$.

Definizione 1.7. Un'applicazione lineare biettiva di uno spazio vettoriale E su uno spazio vettoriale H dicesi *isomorfismo* di E su H e, in particolare, *automorfismo* se $H = E$.

Supposto che E ed H abbiamo la stessa dimensione n ed indicate con $\{\mathbf{e}_i\}$ ed $\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}$ – rispettivamente – una loro base, si ha:

Proprietà 1.6. Tra due spazi E_n ed H_n le applicazioni:

$$\tau : \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i \in E_n \longmapsto \mathbf{w} = x^i \boldsymbol{\varepsilon}_i \in H_n \tag{1.23}$$

esauriscono, al variare delle basi, gli isomorfismi di E_n su H_n.

Basta osservare che la (1.23) è lineare e che associa ad una base $\{\mathbf{e}_i\}$ di E_n una base $\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}$ di H_n. Sussiste infatti la seguente

Proprietà 1.7. Un'applicazione lineare di uno spazio E_n in uno di egual dimensione H_n è un isomorfismo se e solo se ad una base almeno di E_n associa una base di H_n.

Essendo:

$$\tau(\mathbf{x}) = \tau(\mathbf{x} + \mathbf{0}) = \tau(\mathbf{x}) + \tau(\mathbf{0}) \qquad \forall \mathbf{x} \in E_n$$

in un isomorfismo τ di E_n su H_n, il vettore nullo di H_n è associato al solo vettore nullo di E_n e pertanto:

$$\tau(x^i \mathbf{e}_i) = x^i \tau(\mathbf{e}_i) = \mathbf{0} \iff x^i = 0 \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

cioè gli n vettori $\tau(\mathbf{e}_i) \in H_n$ sono indipendenti.

Viceversa τ sia lineare ed il sistema $\{\tau(\mathbf{e}_i)\}$ sia una base di H_n. Essendo:

$$\mathbf{w} = w^i \tau(\mathbf{e}_i) = \tau(w^i \mathbf{e}_i) \qquad \forall \mathbf{w} \in H_n$$

con le w^i univocamente determinate, τ è un isomorfismo.

1.1.7 *Spazio duale. Legge di covarianza*

Sia E^* l'insieme delle forme lineari φ sullo spazio E_n. Ponendo

$$\begin{cases} \varphi_1 + \varphi_2 : \mathbf{x} \in E_n \longmapsto \varphi_1(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}) \qquad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in E^* \\ a\varphi : \mathbf{x} \in E_n \longmapsto a\varphi(\mathbf{x}) \qquad \forall \varphi \in E^*, a \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.24}$$

si ottengono, come agevolmente si verifica, forme lineari su E_n e si dà ad E^* la struttura naturale di spazio vettoriale, detto *duale* di E_n.

Se $\{\mathbf{e}_i\}$ è una base di E_n, $\forall \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i \in E_n$, si ha:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x^i \mathbf{e}_i) = x^i \varphi(\mathbf{e}_i)$$

cioè:

$$\varphi(\mathbf{x}) = x^i \varphi_i \tag{1.25}$$

con le:

$$\varphi_i = \varphi(\mathbf{e}_i) \tag{1.26}$$

e pertanto *una forma è completamente determinata dai valori che associa ai vettore di una base*. Tale osservazione consente di provare che:

Proprietà 1.8. Lo spazio duale E^* di una spazio vettoriale E_n ha la stessa dimensione di E_n e le n forme $\mathbf{e}^{*i}$ definite da:

$$\mathbf{e}^{*i}(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{1.27}$$

ne costituiscono una *base* che dicesi *duale* di quella $\{\mathbf{e}_i\}$ di E_n.

Qualunque sia la forma φ si ha infatti:

$$\varphi = \varphi_i \mathbf{e}^{*i} \tag{1.28}$$

giacché essendo:

$$\varphi_i \mathbf{e}^{*i}(\mathbf{e}_h) = \varphi_i \delta^i_h = \varphi_h \qquad \forall \mathbf{e}_h \in \{\mathbf{e}_i\}$$

Le forme a primo e secondo membro associano ai vettori di $\{\mathbf{e}_i\}$ gli stessi valori. L'indipendenza delle n forme $\mathbf{e}^{*i}$ si prova poi subito giacché, per le (1.27), si ha:

$$a_i \mathbf{e}^{*i} = 0 \iff a_i \mathbf{e}^{*i}(\mathbf{e}_h) = a_i \delta^i_h = a_h = 0 \qquad \forall h$$

Dalla (1.28) segue che i valori φ_i che la forma φ associa agli elementi di una base $\{\mathbf{e}_i\}$ di E_n sono proprio le componenti controvarianti di φ sulla base $\{\mathbf{e}^{*i}\}$, duale di $\{\mathbf{e}_i\}$. Pertanto le componenti di φ in $\{\mathbf{e}^{*i'}\}$, base di E^*_n duale di un'altra base $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ di E_n, sono:

$$\varphi_{i'} = \varphi(\mathbf{e}_{i'})$$

ed esse sono legate alle φ_i dalle:

$$\begin{cases} \varphi_{i'} = A^i_{i'} \varphi_i \\ \varphi_i = A^{i'}_i \varphi_{i'} \end{cases} \tag{1.29}$$

Dalla (1.26) segue infatti:

$$\varphi(\mathbf{x}) = x^i \varphi_i = x^{i'} \varphi_{i'}$$

onde la (1.15) implica la (1.29). Il confronto tra la $(1.29)_1$ e la (1.10) mostra che le componenti dei *vettori* di E^*_n sono covarianti con le basi di E_n e per tale motivo tali vettori diconsi *covarianti* mentre quelli di E_n diconsi *controvarianti*; la (1.29) dicesi poi *legge di covarianza*. È chiaro inoltre che dovendo le φ_i essere controvarianti con le basi di E^*_n – come avviene in ogni spazio vettoriale – le basi di E^*_n si trasformano secondo le:

$$\mathbf{e}^{*i'} = A^{i'}_i \mathbf{e}^{*i} \qquad \mathbf{e}^{*i} = A^i_{i'} \mathbf{e}^{*i'} \tag{1.30}$$

1.1.8 *Orientamenti di uno spazio. Scalari e vettori dispari*

In ogni spazio vettoriale si introduce la nozione di basi concordi o discordi definendo concordi le basi a modulo di trasformazione positivo e discordi quelle a modulo di trasformazione negativo. Detto B l'insieme delle basi di E_n, in B – come subito si verifica – si introduce una relazione di equivalenza definendo equivalenti due basi concordi. In tal modo B si divide in due classi di equivalenza – dette *orientamenti* di E_n e chiamate, ad arbitrio, l'una B^+ orientamento positivo e l'altra B^- orientamento negativo – costituite da basi, concordi tra loro, ciascuna delle quali però è discorde con tutte le basi dell'altra classe. Lo spazio E_n munito delle sole basi di B^+ o delle sole basi di B^- dicesi rispettivamente *orientato* positivamente o negativamente e s'indica con E^+_n o, nell'ordine, E^-_n. Ogni base di E_n – individuando una delle due basi B^+ e B^- – attribuisce ad E_n un orientamento. È facile verificare poi che, sia lo scambio tra due vettori della base che il mutare negli opposti un numero dispari di questi, altera l'orientamento.

Esistono grandezze che hanno carattere intrinseco solo in E^+_n o solo in E^-_n, ma non in tutto E_n. A tale categoria appartengono sia gli *scalari dispari* (pseudoscalari) che i *vettori dispari* (pseudovettori). Si chiamano infatti *scalari dispari* le grandezze scalari associate ad elementi di E_n che si mutano nell'opposto quando E_n cambia di orientamento. Analogamente diconsi *vettori dispari* (o pseudovettori) gli enti che hanno carattere vettoriale – cioè verificano la (1.17) – sia in E^+_n che, separatamente, in E^-_n ma che cambiano di segno quando E_n cambia di orientamento. In seguito avremo esempi sia di scalari che di vettori dispari.

1.2 SPAZI VETTORIALI PSEUDOEUCLIDEI ED EUCLIDEI

1.2.1 *Assiomi degli spazi pseudoeuclidei*

Definizione 1.8. Uno spazio vettoriale E_n dicesi *pseudoeuclideo* se, in $E_n \times E_n$ è definita un'applicazione a valori reali (*moltiplicazione scalare*) tale che, indicato con $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ il numero reale (*prodotto scalare*) che essa associa alla generica coppia $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E_n \times E_n$, sussistono – $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_n, a \in \mathbb{R}$ – gli assiomi:

$$\begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \\ a(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = a\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot a\mathbf{y} \\ \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \ \ \forall \mathbf{x} \in E_n \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{1.31}$$

Proprietà 1.9. Uno spazio E_n assume la struttura di spazio pseudoeuclideo se e solo se si assegna, associata ad una base $\{\mathbf{e}_i\}$, una matrice quadrata $\|g_{ij}\|$, regolare e simmetrica di ordine n, e si definisce il prodotto scalare attraverso la forma bilineare fondamentale:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g_{ij} x^i y^j \qquad \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i, \ \mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j \tag{1.32}$$

ponendo, in particolare:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ij} \tag{1.33}$$

Se E_n è pseudoeuclideo – introdotta una base $\{\mathbf{e}_i\}$ e definite le g_{ij} attraverso la (1.33) – per le prime tre delle (1.31), sussiste la (1.32) con la matrice $\|g_{ij}\|$ simmetrica. La regolarità di questa poi è tradotta dalla $(1.31)_4$. Infatti la $(1.31)_4$ è equivalente alla:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{y} = g_{ij} y^j = 0 \ \ \forall i \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{0} \tag{1.34}$$

il che è possibile se e solo se:

$$g = \det \|g_{ij}\| \neq 0 \tag{1.35}$$

Viceversa, alla base $\{\mathbf{e}_i\}$ sia associata una matrice quadrata $\|g_{ij}\|$ di ordine n, simmetrica e regolare. Definito il prodotto scalare attraverso la forma (1.32), per la linearità di questa e per la simmetria delle g_{ij}, risultano verificate le prime tre delle (1.31). L'ipotesi di regolarità (1.35), implicando la (1.34), assicura poi la $(1.31)_4$.

Due vettori $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$ tali che $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$, si dicono *ortogonali*. Ne segue subito, per la (1.34), che la $(1.31)_4$ richiede che il *solo vettore nullo* sia ortogonale ad n vettori indipendenti. Diconsi poi *norma* $\|\mathbf{x}\|$ e *modulo* x, oppure $|\mathbf{x}|$ di un vettore $\mathbf{x}$, gli scalari:

$$\|\mathbf{x}\| = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = g_{ij} x^i x^j \gtreqless 0, \qquad x = \sqrt{|\|\mathbf{x}\||} = \sqrt{|g_{ij} x^i x^j|} \geq 0 \tag{1.36}$$

ed i vettori di norma uguale a ± 1, cioè di modulo unitario, diconsi *normali* (o *unitari*).

Si osservi infine che – dovendo il prodotto scalare essere intrinseco – risulta determinata la legge di trasformazione delle g_{ij} al variare delle basi. Infatti se $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ è un'altra base, si ha:

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = A_i^{i'} A_j^{j'} \mathbf{e}_{i'} \cdot \mathbf{e}_{j'} = A_i^{i'} A_j^{j'} g_{i'j'} \tag{1.37}$$

da cui, in particolare, $g = \Delta^2 g'$, con $g' = \det \|g_{i'j'}\| \neq 0$.

1.2.2 *Componenti covarianti*

Definizione 1.9. I prodotti scalari $x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ diconsi **componenti covarianti** di $\mathbf{x}$ nella base $\{\mathbf{e}_i\}$.

Da $\mathbf{x} = x^j \mathbf{e}_j$, moltiplicando scalarmente per $\mathbf{e}_i$, segue:

$$x_i = g_{ij} x^j \iff x^i = g^{ij} x_j \tag{1.38}$$

con g^{ij} reciproco di g_{ij}, e pertanto c'è corrispondenza biunivoca tra la n-pla delle componenti covarianti e quella delle componenti controvarianti, cioè *esiste uno ed un solo vettore avente per componenti covarianti, in una data base, una prefissata n-pla*.

L'appellativo di "covarianti" che si da alle $x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i$ risulta giustificato dal fatto che esse si trasformano con la stessa legge con cui si trasformano le basi. Infatti, se $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ è un'altra base, si ha:

$$x_{i'} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^{i} \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i$$

cioè:

$$x_{i'} = A_{i'}^{i} x_i \iff x_i = A_i^{i'} x_{i'} \tag{1.39}$$

Stanti le (1.38), ogni relazione tra vettori si può esprimere in funzione delle sole componenti controvarianti, delle sole componenti covarianti o in forma mista. Ad esempio per il prodotto scalare si ha:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g_{ij} x^i y^j = x^i y_i = g^{ij} x_i y_j \tag{1.40}$$

1.2.3 *Identificazione di uno spazio pseudoeuclideo con il proprio duale*

Indicata con $\{\mathbf{e}_i\}$ ed $\{\mathbf{e}^{*i}\}$, rispettivamente, una base di uno spazio pseudoeuclideo E_n e la duale in E_n^*, le forme lineari:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^* = g_{ij} \mathbf{e}^{*j} \qquad g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \tag{1.41}$$

costituiscono una base di E_n^* covariante con $\{\mathbf{e}_i\}$. Infatti – essendo $g = \det \|g_{ij}\| \neq 0$ – $\{\boldsymbol{\varepsilon}_i^*\}$ è una base di E_n^* e se $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ è un'altra base di E_n, per la $(1.18)_3$ e per la (1.37) si ha:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^* = A_i^{i'} A_j^{j'} A_{k'}^{j} g_{i'j'} \mathbf{e}^{*k'} = A_i^{i'} \delta_{k'}^{j'} g_{i'j'} \mathbf{e}^{*k'} = A_i^{i'} g_{i'j'} \mathbf{e}^{*j'} = A_i^{i'} \boldsymbol{\varepsilon}_{i'}^* \tag{1.42}$$

Consideriamo ora l'applicazione di E_n in E_n^*:

$$\tau : \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i \in E_n \longmapsto \varphi = x^i \boldsymbol{\varepsilon}_i^* \in E_n^* \tag{1.43}$$

La (1.43) è del tipo (1.23) e, pertanto, è un isomorfismo di E_n su E_n^* ed associa agli elementi di $\{\mathbf{e}_i\}$ gli omologhi di $\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}$. Poiché, inoltre, le basi $\{\mathbf{e}_i\}$ e $\{\boldsymbol{\varepsilon}_i^*\}$ si trasformano con la stessa legge, la corrispondenza stabilita dall'isomorfismo (1.43) è intrinseca, cioè vettori corrispondenti hanno le stesse componenti su una qualsiasi coppia di basi associate. È proprio per tale motivo che l'isomorfismo (1.43) consente di identificare ogni E_n pseudoeuclideo col proprio duale, identificando gli elementi associati, ed a tale scopo basta porre:

$$\mathbf{e}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i^* \tag{1.44}$$

cioè:

$$\mathbf{e}_i = g_{ij} \mathbf{e}^{*j} \iff \mathbf{e}^{*i} = g^{ij} \mathbf{e}_j \tag{1.45}$$

1.2.4 *Spazi vettoriali euclidei*

Definizione 1.10. Dicesi *euclideo* ogni spazio ogni spazio pseudoeuclideo E_n tale che:

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \implies \|\mathbf{x}\| > 0 \qquad \forall \mathbf{x} \in E_n \tag{1.46}$$

Uno spazio pseudoeuclideo è dunque euclideo solo se la forma quadratica $(1.36)_1$ – detta *metrica o forma quadratica fondamentale di E_n* – è definita positiva e, pertanto, se il solo vettore nullo ha norma (e modulo) nulli. In ogni E_n euclideo sussistono le proprietà:

Proprietà 1.10. Il modulo del prodotto non supera il prodotto dei moduli dei fattori (*disuguaglianza di Schwarz*).

Proprietà 1.11. Il modulo della somma non supera la somma dei moduli degli addendi (*disuguaglianza triangolare*).

Si ha:

$$\|\lambda \mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \lambda^2 \|\mathbf{x}\| + 2\lambda \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\| \geq 0 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

e pertanto $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$, onde la disuguaglianza di Schwarz:

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \tag{1.47}$$

dalla quale segue poi:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + \|\mathbf{y}\| = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2$$

onde la disuguaglianza triangolare:

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}| \tag{1.48}$$

La disuguaglianza (1.47) consente di definire l'*angolo* $\widehat{\mathbf{xy}}$ tra due vettori non nulli $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$ ponendo:

$$\cos \widehat{\mathbf{xy}} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_n - \{\mathbf{0}\} \tag{1.49}$$

Infatti, per la (1.47), il modulo del secondo membro non supera 1 e pertanto esiste uno ed un solo angolo $\varphi = \widehat{\mathbf{xy}} \in [0, \pi]$ per cui vale la (1.49). A seconda che $\widehat{\mathbf{xy}} = 0$ oppure $\widehat{\mathbf{xy}} = \pi$ si dice che $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$ hanno lo stesso orientamento o orientamento opposto; se uno dei vettori è nullo, l'angolo è indeterminato.

1.2.5 *Basi ortonormali*

Definizione 1.11. Un sistema di vettori $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ di uno spazio pseudoeuclideo, dicesi *ortonormale* se

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \pm\delta_{ij} = \begin{cases} \pm 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \tag{1.50}$$

Proprietà 1.12. I vettori di un sistema ortonormale sono linearmente indipendenti.

Per le (1.50) infatti si ha:

$$a^i \mathbf{e}_i = 0 \Longrightarrow a^i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \Longleftrightarrow a^j = 0 \qquad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

La proprietà precedente implica $m \leq n$; se $m = n$, il sistema $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ costituisce una *base ortonormale*. Notevoli sono i vantaggi che porta il riferire un E_n pseudoeuclideo a basi ortonormali e tali vantaggi derivano dalla:

Proprietà 1.13. Tra le componenti omonime covarianti e controvarianti di un generico vettore $\mathbf{x}$ in una base ortonormale $\{\mathbf{e}_i\}$, sussiste la relazione

$$x^i = \pm x_i \tag{1.51}$$

ove il segno va preso concordemente con la $\|\mathbf{e}_i\| = \pm 1$.

In un E_n euclideo, non vi è dunque differenza tra le componenti omonime covarianti e controvarianti in una base ortonormali ed esse vengono chiamate semplicemente *ortonormali*. Il prodotto scalare, la norma, il modulo e la identificazione (1.45) assumono poi, in componenti ortonormali, le seguenti espressioni ridotte, *invarianti* rispetto ai cambiamenti di base ortonormali

$$\begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \cdots + x^n y^n \\ \|\mathbf{x}\| = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^n)^2 \\ x = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^n)^2} \\ \mathbf{e}_i = \mathbf{e}^{*i} \end{cases} \tag{1.52}$$

Se E_n non è euclideo, tra gli elementi di una base ortonormale $\{\mathbf{e}_i\}$, ve ne sono alcuni aventi per norma -1. Supposto, come è lecito, che tali vettori siano $\mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ ($p \leq n$), dalla (1.40) e dalla (1.51), seguono le relazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^1 y^1 + \cdots + x^p y^p - x^{p+1} y^{p+1} - \cdots - x^n y^n \\ \|\mathbf{x}\| = (x^1)^2 + \cdots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \cdots - (x^n)^2 \end{cases} \tag{1.53}$$