



**Curatore:** Prof.ssa Florinda Capone.

**Collaboratori:** Chiara Accarino, Giuseppe Arnone, Ludovica Fiorentino, Jacopo A. Gianfrani, Francesco Iovanna, Giuliana Massa.

**Edizioni precedenti:** *prima* (1973), *seconda* (1976), *terza* (1988)

Liguori Editore

*Parole chiave*

Fisica Matematica  
Meccanica Classica  
Elementi di Relatività Ristretta  
Elementi di Meccanica dei Continui

*Keywords*

Mathematical Physics  
Classical Mechanics  
Elements of Special Relativity  
Elements of Continuum Mechanics

*Classificazione Decimale Dewey:*

**531.0711 (23.) MECCANICA CLASSICA MECCANICA DEI SOLIDI. Educazione superiore**

**SALVATORE RIONERO**

**LEZIONI  
DI MECCANICA RAZIONALE  
NUOVA EDIZIONE**

*Prefazione di*

**FLORINDA CAPONE**





©

ISBN  
979-12-218-0810-0

QUARTA EDIZIONE  
**ROMA** 19 LUGLIO 2023

*Alla memoria di mio padre*



# INDICE

---

*Prefazione*

di FLORINDA CAPONE    xix

## I TEORIE INTRODUTTIVE

1	ALGEBRA DEGLI SPAZI VETTORIALI	3
1.1	Spazi vettoriali	3
1.1.1	Proprietà elementari degli spazi vettoriali. Esempi	3
1.1.2	Dimensione e basi di uno spazio vettoriale	4
1.1.3	Cambiamenti di base in $E_n$ . Legge di controvarianza	5
1.1.4	Convenzione sugli indici ripetuti	7
1.1.5	Sottospazi. Sottospazi supplementari	8
1.1.6	Applicazioni lineari tra spazi vettoriali	9
1.1.7	Spazio duale. Legge di covarianza	10
1.1.8	Orientamenti di uno spazio. Scalari e vettori dispari	11
1.2	Spazi vettoriali pseudoeuclidei ed euclidei	12
1.2.1	Assiomi degli spazi pseudoeuclidei	12
1.2.2	Componenti covarianti	13
1.2.3	Identificazione di uno spazio pseudoeuclideo con il proprio duale	13
1.2.4	Spazi vettoriali euclidei	14
1.2.5	Basi ortonormali	15
1.2.6	Ortogonalizzazione	16
1.2.7	Isometrie	17
1.3	Spazi puntuali euclidei	17
1.3.1	Spazi puntuali affini	17
1.3.2	Coordinate rettilinee di uno spazio puntuale affine	18
1.3.3	Spazi puntuali pseudoeuclidei ed euclidei	19
1.3.4	Spazi puntuali isometrici	20
1.3.5	Relazione d'equivalenza tra vettori applicati. Vantaggio della notazione di Grassmann	20
1.4	Vettori e punti variabili	21
1.4.1	Funzioni vettoriali di una variabile reale. Limiti	21
1.4.2	Derivata, differenziale e formula di Taylor di una funzione vettoriale di una variabile	22
1.4.3	Derivata e differenziale di un punto variabile	24
1.4.4	Vettori e punti dipendenti da più variabili	26
1.4.5	Coordinate curvilinee e riferimento naturale associato	26
1.4.6	Integrazione delle funzioni vettoriali	27
2	ALGEBRA TENSORIALE	29
2.1	Tensori	29
2.1.1	Prodotto tensoriale	29

	2.1.2	Tensori affini e legge di trasformazione delle loro componenti	30
	2.1.3	Operazioni algebriche sui tensori affini	31
	2.1.4	Criteri di tensorialità	32
	2.1.5	Tensori simmetrici e tensori antisimmetrici	33
	2.1.6	Tensori pseudoeuclidei	34
	2.1.7	Operazioni sui tensori pseudoeuclidei. Simmetria ed antisimmetria	35
	2.1.8	Tensori euclidei	36
	2.2	Endomorfismi, invarianti, ...	36
	2.2.1	Collegamento tra endomorfismi e tensori doppi	36
	2.2.2	Invarianti di un tensore doppio euclideo	37
	2.2.3	Automorfismi	38
	2.2.4	Autovalori ed autovettori di un tensore doppio pseudoeuclideo	39
	2.2.5	Autovettori ed autovalori di un tensore simmetrico	40
3	CALCOLO VETTORIALE NELLO SPAZIO FISICO		43
	3.1	Prodotto vettoriale e prodotto misto. Doppio prodotto vettoriale	43
	3.1.1	Generalità	43
	3.1.2	Assioma dello spazio fisico di un osservatore	43
	3.1.3	Versori e proiezione ortogonale di un vettore	44
	3.1.4	Rappresentazione grafica della somma e della differenza vettoriale. Scomposizione di un vettore	45
	3.1.5	Prodotto vettoriale	45
	3.1.6	Prodotto misto	47
	3.1.7	Doppio prodotto vettoriale	49
	3.2	Momento scalare e vettoriale di un sistema di vettori applicati, ...	50
	3.2.1	Momento polare di un sistema di vettori	50
	3.2.2	Legge di variazione del momento al variare del polo. Campo momento	51
	3.2.3	Momento di una coppia	51
	3.2.4	Momento assiale di un sistema di vettori applicati	52
	3.2.5	Condizioni di equivalenza ed operazioni invariantive elementari	54
	3.2.6	Equivalenza di ogni sistema ad un vettore applicato in un punto arbitrario prefissato più una coppia. Equivalenza a due vettori	54
	3.2.7	Sistemi equivalenti a zero	55
	3.2.8	Definizione e prime proprietà del centro di un sistema di vettori applicati paralleli a risultante non nullo	55
	3.2.9	Centro di due vettori paralleli	56
	3.2.10	Proprietà distributiva e proprietà di ubicazione del centro di un sistema parallelo	57
	3.3	Proprietà differenziali delle curve. Triedro di Frenet. Geodetiche	58
	3.3.1	Ascissa curvilinea e versore della tangente	58
	3.3.2	Piano osculatore	59



3.3.3	Curvatura e raggio di curvatura	60
3.3.4	Prima formula di Frenet e triedro principale	60
3.3.5	Geodetiche di una superficie	61
3.4	Endomorfismi e campi vettoriali dello spazio fisico	62
3.4.1	Tensori isotropi ed endomorfismi associati	62
3.4.2	Quadrica indicatrice di un tensore doppio simmetrico	63
3.4.3	Vettore aggiunto di un tensore doppio emisimmetrico	63
3.4.4	Campi vettoriali dello spazio fisico	64
3.4.5	Campi equiproiettivi	65
3.4.6	Invariante scalare e vettoriale di un campo equiproiettivo	66
3.4.7	Asse di un campo equiproiettivo	66
3.4.8	Asse centrale ed invariante scalare e vettoriale di un sistema di vettori applicati. Sistemi ad invariante scalare nullo	67
3.5	Gradiente, divergenza e rotore, campi conservativi	68
3.5.1	Gradiente di una funzione scalare	68
3.5.2	Circolazione di un campo vettoriale	69
3.5.3	Divergenza di un campo vettoriale	69
3.5.4	Rotore di un campo vettoriale	70
3.5.5	Flusso di un campo vettoriale	71
3.5.6	Lemma di Gauss e teorema della divergenza	72
3.5.7	Teorema di Stokes	73
3.5.8	Campi conservativi	74
3.5.9	Gradiente di un campo tensoriale	75
3.5.10	Divergenza di un campo tensoriale	76

## II CINEMATICA

4	CINEMATICA DEL PUNTO	79
4.1	Assiomi della cinematica classica	79
4.1.1	Generalità	79
4.1.2	Tempo proprio di un osservatore	79
4.1.3	Spazio-tempo di un osservatore. Moto e quiete. Schematizzazioni	79
4.1.4	Collegamento tra gli spazi-tempo di due osservatori. Assiomi delle distanze dei tempi assoluti	80
4.2	Generalità sul moto di un punto	81
4.2.1	Equazioni finite del moto di un punto	81
4.2.2	Legge oraria e diagramma orario	82
4.2.3	Moti composti	83
4.3	Velocità scalare e vettoriale	83
4.3.1	Velocità scalare	83
4.3.2	Moto uniforme	84
4.3.3	Velocità vettoriale	84
4.4	Accelerazione scalare e vettoriale	85
4.4.1	Accelerazione scalare	85
4.4.2	Moto accelerato e moto ritardato	86
4.4.3	Moto uniformemente vario	86

4.4.4	Accelerazione vettoriale	87
4.4.5	Accelerazione tangenziale ed accelerazione normale	88
4.5	Moti piani	89
4.5.1	Riferimento naturale associato alle coordinate polari	89
4.5.2	Velocità ed accelerazione radiale e trasversa	90
4.5.3	Velocità angolare e velocità areale	91
4.6	Applicazioni ed esempi	93
4.6.1	Moto circolare	93
4.6.2	Moto circolare uniforme	94
4.6.3	Moto armonico	95
4.6.4	Equazione differenziale dei moti armonici	96
4.6.5	Moto elicoidale uniforme	96
5	CINEMATICA DEI SISTEMI RIGIDI	99
5.1	Moti rigidi generali	99
5.1.1	Punti di vista Lagrangiano ed Euleriano	99
5.1.2	Generalità sugli spostamenti e sui moti rigidi	99
5.1.3	Equazioni generali sui moti rigidi	101
5.1.4	Grado di libertà di un corpo rigido	102
5.1.5	Condizione cinematica di rigidità. Velocità angolare	103
5.1.6	Derivata di un vettore solidale. Formule di Poisson	103
5.2	Moti rigidi elementari	104
5.2.1	Moto traslatorio	104
5.2.2	Moto rotatorio	105
5.2.3	Moto rigido elicoidale	106
5.3	Moti rigidi dal punto di vista Euleriano	108
5.3.1	Atto di moto	108
5.3.2	Moti tangenti	109
5.3.3	Atto di moto elicoidale. Teorema di Mozzi	110
5.3.4	Moti rigidi sferici	110
5.3.5	Moti rigidi piani	111
5.3.6	Spostamento rigido infinitesimo	111
6	CINEMATICA DEI SISTEMI DEFORMABILI	113
6.1	Generalità sulla cinematica dei sistemi di corpi rigidi	113
6.1.1	Sistemi a vincoli olonomi	113
6.1.2	Coordinate lagrangiane	114
6.1.3	Equazioni del moto in coordinate lagrangiane	115
6.1.4	Spostamenti possibili e spostamenti virtuali	116
6.1.5	Spostamenti virtuali, reversibili ed irreversibili	117
6.2	Cinematica dei sistemi continui deformabili	118
6.2.1	Rappresentazione lagrangiana del moto	118
6.2.2	Rappresentazione euleriana del moto	119
6.2.3	Linee di corrente e linee di flusso	120
6.2.4	Alcune identità cinematiche. Teorema del trasporto	122
6.2.5	Formula fondamentale della cinematica dei sistemi continui	123
6.2.6	Coefficiente di dilatazione lineare e cubica. Deformazioni angolari	124

6.2.7	L'atto di moto rigido come caso particolare di un generico atto di moto continuo	126
7	MOTO DI UNO STESSO CORPO IN SPAZI-TEMPO DIVERSI	127
7.1	Moto di un punto in due spazi-tempo	127
7.1.1	Generalità	127
7.1.2	Principio dei moti relativi	127
7.1.3	Teorema di Coriolis	128
7.1.4	Moto di trascinamento traslatorio - Spazi equivalenti	129
7.1.5	Moto di trascinamento rotatorio	130
7.1.6	Relazione tra le derivate temporali di un vettore variabile in due spazi mobili	131
7.2	Moto di un sistema materiale in più spazi mobili	131
7.2.1	Moti composti. Composizione di moti rigidi	131
7.2.2	Precessioni regolari	132
7.2.3	Angoli di Eulero	134
7.2.4	Relazioni funzionali tra le componenti della velocità angolare e gli angoli di Eulero	136
III DINAMICA GENERALE		
8	FONDAMENTI DELLA DINAMICA CLASSICA DEL PUNTO	141
8.1	Assiomi della dinamica classica del punto	141
8.1.1	Generalità	141
8.1.2	Principio d'inerzia	141
8.1.3	Spazi-tempo inerziali	142
8.1.4	Postulati di Kirchhoff e Mach	143
8.1.5	Massa inerziale	144
8.1.6	Forza	144
8.1.7	Principio di azione e reazione	145
8.1.8	Legge di forza	145
8.1.9	Forze assegnate. Campi di forza	146
8.1.10	Equazione fondamentale della meccanica del punto libero e suo carattere determinista	147
8.1.11	Integrali primi	149
8.1.12	Equazioni intrinseche	150
8.1.13	Statica del punto libero in spazi inerziali: definizioni e condizioni d'equilibrio	150
8.2	Dinamica del punto in spazi non inerziali	151
8.2.1	Equazione fondamentale della meccanica del punto libero in spazi non inerziali	151
8.2.2	Equazione del moto di un punto libero in uno spazio in moto traslatorio rispetto ad uno spazio inerziale. Principio di relatività galileiana	152
8.2.3	Equazioni del moto di un punto libero in uno spazio in moto rotatorio uniforme rispetto ad uno spazio inerziale	152
8.2.4	Statica del punto libero in spazi non inerziali: definizione e condizione d'equilibrio relativo	153

- 8.3 Meccanica terrestre 153
  - 8.3.1 Moto dello spazio terrestre nello spazio inerziale  $\mathcal{E}_S$ . Forze apparenti della meccanica terrestre 153
  - 8.3.2 Peso 154
  - 8.3.3 Massa inerziale e massa gravitazionale 155
  - 8.3.4 Equazione fondamentale della meccanica terrestre 156
- 9 FONDAMENTI DELLA DINAMICA CLASSICA DEI SISTEMI 159
  - 9.1 Equazioni cardinali della meccanica per i sistemi di punti materiali 159
    - 9.1.1 Determinazione della prima forma delle equazioni cardinali della meccanica per i sistemi di punti materiali 159
    - 9.1.2 Equazioni cardinali della statica 160
    - 9.1.3 Quantità di moto e baricentro di un sistema di punti materiali 161
    - 9.1.4 Equazioni di bilancio della quantità di moto 161
    - 9.1.5 Equazione del bilancio del momento della quantità di moto 162
  - 9.2 Equazioni cardinali della Meccanica per i sistemi continui 163
    - 9.2.1 Equazione di continuità della massa ed identità integrale associata 163
    - 9.2.2 Forze ripartite. Forze a distanza e forze di contatto 164
    - 9.2.3 Estensione ai sistemi di forze ripartite delle proprietà relative ai sistemi di vettori applicati. Baricentro di un sistema continuo 165
    - 9.2.4 Assioma delle equazioni cardinali. Equazioni del bilancio per i sistemi continui 166
  - 9.3 Equazioni del bilancio per sistemi materiali qualsiasi 167
    - 9.3.1 Equazioni del bilancio per sistemi materiali qualsiasi 167
    - 9.3.2 Principio d'azione e reazione fra i sistemi 168
  - 9.4 Moto intorno al baricentro 168
    - 9.4.1 Moto intorno al baricentro 168
    - 9.4.2 Moto del baricentro ed influenza delle forze interne sul moto del baricentro 169
    - 9.4.3 Integrale della quantità di moto e conservazione del moto del baricentro 170
    - 9.4.4 Integrale del momento della quantità di moto, momento assiale della quantità di moto e momento d'inerzia 171
- 10 BARICENTRI E MOMENTI D'INERZIA E DELLE QUANTITÀ DI MOTO 175
  - 10.1 Baricentri 175
    - 10.1.1 Coordinate del baricentro e baricentro dei sistemi omogenei 175
    - 10.1.2 Proprietà di ubicazione del baricentro 176
    - 10.1.3 Esempi di determinazione del baricentro 176
  - 10.2 Momenti d'inerzia 178
    - 10.2.1 Momento e raggio di inerzia 178
    - 10.2.2 Tensore d'inerzia 178

- 10.2.3 Autovalori ed autodirezioni del tensore d'inerzia. Ellissoide d'inerzia 180
- 10.2.4 Legge di variazione del tensore d'inerzia al variare del polo 181
- 10.2.5 Proprietà riguardanti la determinazione degli assi e dei piani principali 183
- 10.2.6 Tensore centrale d'inerzia di alcune figure omogenee 183
- 10.3 Momenti delle quantità di moto 185
  - 10.3.1 Momento delle quantità di moto nel moto intorno al baricentro 185
  - 10.3.2 Momento della quantità di moto di un sistema rigido 185
- 11 LAVORO, POTENZA ED ENERGIA 187
  - 11.1 Lavoro 187
    - 11.1.1 Lavoro di un sistema di forze 187
    - 11.1.2 Lavoro di un sistema di forze per uno spostamento rigido infinitesimo dei punti di applicazione 188
    - 11.1.3 Lavoro di un sistema di forze a direzione costante e a risultante non nullo 189
    - 11.1.4 Lavoro virtuale e componenti lagrangiane di un sistema di forze 189
  - 11.2 Energia potenziale 190
    - 11.2.1 Sollecitazioni derivanti da un potenziale. Sollecitazioni conservative 190
    - 11.2.2 Esempi di campi di forze conservativi 191
    - 11.2.3 Esempi di sollecitazioni conservative costituite da più forze 194
  - 11.3 Energia cinetica 194
    - 11.3.1 Energia cinetica di un sistema. Teorema di König 194
    - 11.3.2 Energia cinetica di un sistema rigido 195
    - 11.3.3 Energia cinetica di un sistema olonomo 197
  - 11.4 Teorema ed integrale dell'energia cinetica 198
    - 11.4.1 Teorema dell'energia cinetica per i sistemi materiali discreti e per i continui rigidi 198
    - 11.4.2 Teorema dell'energia cinetica per un sistema olonomo 199
    - 11.4.3 Integrale dell'energia e principio di conservazione dell'energia meccanica 200
- 12 DINAMICA DEI SISTEMI OLONOMI DI CORPI RIGIDI 201
  - 12.1 Equazioni di Lagrange e di Hamilton 201
    - 12.1.1 Reazioni vincolari 201
    - 12.1.2 Problema fondamentale della dinamica dei sistemi olonomi di corpi rigidi 201
    - 12.1.3 Sistemi a vincoli privi di attrito 202
    - 12.1.4 Equazione di D'Alembert e Lagrange 203
    - 12.1.5 Una proprietà del lavoro virtuale delle reazioni vincolari nei sistemi privi d'attrito 203
    - 12.1.6 Relazione simbolica della dinamica 205

12.1.7	Componenti lagrangiane del sistema delle forze d'inerzia	205
12.1.8	Equazioni di Lagrange e loro carattere determinista	206
12.1.9	Teorema ed integrale dell'energia cinetica per i sistemi di solidi a vincoli lisci, fissi e bilaterali	207
12.1.10	Funzione lagrangiana	208
12.1.11	Equazioni di Hamilton	209
12.1.12	Significato fisico dell'hamiltoniana	210
12.2	Statica dei sistemi olonomi di corpi rigidi	211
12.2.1	Condizioni lagrangiane d'equilibrio dei sistemi olonomi di solidi a vincoli lisci e bilaterali	211
12.2.2	Principio dei lavori virtuali	212
12.2.3	Principio di Torricelli	212
12.2.4	Una caratterizzazione delle reazioni vincolari esplicabili da vincoli lisci su un sistema di solidi	213
12.2.5	Determinazione delle reazioni vincolari esplicabili da alcuni vincoli più comuni	214
12.3	Stabilità e piccoli moti di un sistema di solidi	216
12.3.1	Moti e posizioni di equilibrio stabili di un sistema di solidi	216
12.3.2	Criterio di stabilità di Dirichlet e sua inversione	217
12.3.3	Piccoli moti di un sistema di solidi a vincoli olonomi bilaterali lisci e fissi intorno ad una posizione d'equilibrio stabile	218
12.4	Attrito	221
12.4.1	Leggi dell'attrito radente statico	221
12.4.2	Leggi dell'attrito radente dinamico	224
12.4.3	Attrito volvente	225
12.4.4	Dissipatività delle reazioni vincolari nei sistemi di solidi a vincoli olonomi scabri, fissi e bilaterali	226
12.4.5	Perdita di energia meccanica nei sistemi dissipativi	227
12.4.6	Estensione ai sistemi dissipativi del criterio di stabilità di Dirichlet	228
13	ELEMENTI DI DINAMICA DEI CONTINUI DEFORMABILI	229
13.1	Equazioni del bilancio in forma locale	229
13.1.1	Assioma degli sforzi e specificazione delle equazioni cardinali	229
13.1.2	Teorema di Cauchy e tensore degli sforzi	230
13.1.3	Equazioni del bilancio locale della quantità di moto	232
13.1.4	Seconda equazione vettoriale indefinita: simmetria del tensore degli sforzi	232
13.1.5	Condizioni al contorno per il vettore sforzo	233
13.1.6	Teorema dell'energia cinetica per i sistemi continui	233
13.1.7	Problema fondamentale della meccanica dei sistemi continui	234
13.1.8	Primo principio della termodinamica	234
13.1.9	Secondo principio della termodinamica	235
13.2	Fluidi perfetti	236

13.2.1	Equazione costitutiva dei fluidi non viscosi ed osservazione di Cauchy	236
13.2.2	Fluidi perfetti e loro equazione caratteristica	237
13.2.3	Fluido perfetto barotropico in equilibrio sotto l'azione di forze conservative	238
13.2.4	Alcune proprietà di un fluido perfetto barotropico in moto sotto l'azione di forze conservative	239
13.2.5	Teorema di Bernoulli per i moti stazionari	240
IV PROBLEMI DI MECCANICA		
14	PROBLEMI DI MECCANICA DEL PUNTO VINCOLATO	243
14.1	Problemi di meccanica del punto vincolato a una curva	243
14.1.1	Equazione differenziale del moto di un punto vincolato ad una curva priva d'attrito	243
14.1.2	Condizione pura d'equilibrio di un punto vincolato ad una curva	244
14.1.3	Equilibrio di un punto pesante vincolato su una circonferenza uniformemente rotante	244
14.1.4	Pendolo semplice	246
14.1.5	Moto di un punto vincolato ad una curva fissa e liscia, soggetto a una forza elastica di richiamo e ad una resistenza viscosa	249
14.1.6	Moti forzati – risonanza	252
14.1.7	Equazione differenziale dei piccoli moti di un punto vincolato ad una curva fissa e priva d'attrito, intorno ad una posizione d'equilibrio stabile.	254
14.1.8	Stabilità lineare	255
14.1.9	Piccole oscillazioni del pendolo semplice	255
14.2	Problemi di meccanica del punto vincolato ad una superficie	256
14.2.1	Condizioni pure d'equilibrio di un punto poggiato o vincolato ad una superficie	256
14.2.2	Casi di equilibrio dovuti all'attrito	257
14.2.3	Equazioni del moto di un punto per una superficie fissa	258
14.2.4	Moto di un punto pesante su un piano inclinato	258
14.2.5	Moto spontaneo di un punto su una superficie	259
15	PROBLEMI DI MECCANICA DEL PUNTO LIBERO	261
15.1	Moto dei gravi puntiformi nel vuoto e nell'aria	261
15.1.1	Moto dei gravi nel vuoto	261
15.1.2	Libera caduta dei gravi nell'aria	262
15.1.3	Influenza della rotazione terrestre sulla caduta dei gravi nel vuoto	265
15.2	Moto di un punto libero in un campo centrale	267
15.2.1	Proprietà generali del moto di un punto libero in un campo centrale. Formula di Binet	267
15.2.2	Moto di un punto libero soggetto a una forza elastica di richiamo	269

15.2.3	Moto di un punto libero in un campo centrale newtoniano	270
15.2.4	Orbite ellittiche e leggi di Keplero	272
15.2.5	Velocità di fuga	274
15.2.6	Orbite circolari e satelliti geostazionari	275
15.2.7	Problema dei due corpi	276
16	PROBLEMI DI STEREOMECCANICA	279
16.1	Problemi di meccanica del solido con un asse fisso privo di attrito	279
16.1.1	Equazione differenziale del moto di un solido con un asse fisso privo di attrito	279
16.1.2	Condizione pura d'equilibrio di un solido con un asse fisso privo di attrito. Applicazioni	280
16.1.3	Pendolo composto	280
16.2	Problemi di meccanica del solido con un punto fisso privo di attrito	282
16.2.1	Equazioni del moto di un solido con punto fisso privo d'attrito	282
16.2.2	Condizione pura d'equilibrio di un solido con un punto fisso privo di attrito	283
16.2.3	Moti per inerzia. Rotazioni permanenti	284
16.2.4	Moto per inerzia di un solido a struttura giroscopica	285
16.2.5	Giroscopio di Foucault	287
16.3	Problemi di meccanica del solido libero	288
16.3.1	Equazioni del moto di un solido libero	288
16.3.2	Condizione d'equilibrio di un solido libero	289
16.3.3	Separabilità del moto intorno al baricentro dal moto del baricentro	290
16.3.4	Moto di un satellite artificiale terrestre schematizzato con un corpo rigido	290
16.3.5	Moto di un solido libero pesante nel vuoto	291
16.4	Altri problemi di stereomeccanica	291
16.4.1	Vibrazioni longitudinali principali di una molecola triatomica lineare simmetrica	291
16.4.2	Solido in equilibrio rispetto ad un'astronave	293
V	INTRODUZIONE ALLA RELATIVITÀ RISTRETTA	
17	ELEMENTI DI RELATIVITÀ RISTRETTA	297
17.1	Difficoltà della fisica prerelativistica e postulati della relatività ristretta	297
17.1.1	Spazio otticamente isotropo	297
17.1.2	Esperienza di Michelson	297
17.1.3	Osservazione di De Sitter	298
17.1.4	Aberrazione astronomica	299
17.1.5	Postulati della relatività ristretta	300
17.2	Cinematica relativistica	300



17.2.1	Tempo pantopico associato ad uno spazio otticamente isotropo. Spazi-tempo della relatività ristretta	300
17.2.2	Trasformazione speciale di Lorentz	301
17.2.3	Contrazione di Lorentz	304
17.2.4	Dilatazione dei tempi	305
17.2.5	Relatività della contemporaneità e dell'ordine di successione temporale di due eventi	306
17.2.6	Legge relativistica di composizione delle velocità	308
17.2.7	Esperienza di Fizeau	308
17.3	Elementi di dinamica relativistica	310
17.3.1	Formulazione matematica del principio di relatività. Universo di Minkowski	310
17.3.2	Traiettoria, velocità ed accelerazione d'Universo	311
17.3.3	Equazione relativistica della dinamica del punto	313
17.3.4	Energia cinetica relativistica ed equivalenza massa-energia	316

## APPENDICE

A	SPAZIO FISICO E CALCOLO TENSORIALE IN ESSO	321
A.1	Vettori e loro rappresentazione	321
A.1.1	Generalità	321
A.1.2	Assioma dello spazio fisico	321
A.1.3	Definizione di vettore	321
A.1.4	Definizione di vettore applicato	323
A.1.5	Componente di un vettore su una retta orientata.	323
A.1.6	Componenti cartesiane di un vettore	324
A.2	Operazioni sui vettori e sui punti	325
A.2.1	Somma di un punto e di un vettore	325
A.2.2	Composizione di vettori e vettore somma	326
A.2.3	Scomposizione di un vettore	328
A.2.4	Prodotto di un vettore per un numero reale.	329
A.2.5	Scomposizione cartesiana di un vettore	330
A.2.6	Prodotto scalare di due vettori	331
A.2.7	Spazio dei vettori	332
A.2.8	Orientamenti dello spazio. Vettori e scalari dispari.	332
B	ELEMENTI DI ANALISI VETTORIALE	335
B.1	Vettori e punti variabili	335
B.1.1	Funzioni vettoriali di una variabile reale. Limiti	335
B.1.2	Derivata, differenziale e formula di Taylor di una funzione vettoriale di una variabile	335
B.1.3	Derivata e differenziale di un punto variabile	337
B.1.4	Vettori e punti dipendenti da più variabili	339
B.1.5	Coordinate curvilinee e riferimento naturale associato	339
B.1.6	Integrazione delle funzioni vettoriali	340
C	ALGEBRA TENSORIALE	343
C.1	Tensori	343
C.1.1	Legge di trasformazione delle componenti di un vettore	343

XVIII *Indice*

c.1.2	Definizione di tensore. Prodotto tensoriale	344
c.1.3	Convenzione sugli indici ripetuti	345
c.1.4	Operazioni algebriche sui tensori	346
c.1.5	Criteri di Tensorialità	347
c.1.6	Tensori simmetrici e tensori antisimmetrici	348
c.2	Invarianti, endomorfismi ed autovalori associati ai tensori doppi	349
c.2.1	Invarianti di un tensore doppio	349
c.2.2	Endomorfismi e loro collegamento con i tensori doppi	349
c.2.3	Automorfismi	350
c.2.4	Autovalori e autovettori di un tensore doppio	351
c.2.5	Autovettori e autovalori di un tensore simmetrico	352
Indice analitico		354

## PREFAZIONE

---

Sono trascorsi circa trent'anni dall'ultima edizione del libro "Lezioni di Meccanica Razionale" di Salvatore Rionero. Pur essendo passati molti anni dalla sua scrittura - la prima edizione risale al 1973 - esso, fatta eccezione per la veste grafica, non ha subito un processo, si direbbe, di invecchiamento; al contrario esso ha costituito, e continua attualmente a costituire, un prezioso strumento didattico per i corsi di base di Fisica Matematica e Meccanica Razionale.

I contenuti sono rimasti immutati nella loro struttura e in questa riedizione appaiono in una nuova veste digitalizzata di più agevole lettura rispetto alla precedente versione dattiloscritta. Sono stati inoltre corretti i refusi precedentemente riportati nell'errata corrige, che appariva in appendice all'ultima edizione del 1988.

Il pregio che caratterizza questo libro è il suo approccio fondazionale alla Meccanica Razionale, nonché il suo carattere autoconsistente e di ampio respiro didattico. In questo spirito, il testo, passando attraverso una rigorosa analisi dello spazio fisico della Meccanica e per lo studio della Cinematica e della Dinamica, propone un'introduzione coerentemente contestualizzata alla Meccanica dei Continui, alla Dinamica dei Fluidi fino alla Relatività Ristretta.

Colgo l'occasione per ringraziare calorosamente la famiglia del Professore Salvatore Rionero per aver reso possibile la ristampa di questo libro.

Considero questo un omaggio al mio Maestro, perché la sua voce scientifica continui a circolare e ispirare generazioni di studenti e futuri ricercatori.

Napoli, Aprile 2023  
Florinda Capone



Parte I

TEORIE INTRODUTTIVE



## ALGEBRA DEGLI SPAZI VETTORIALI

---

### 1.1 SPAZI VETTORIALI

#### 1.1.1 Proprietà elementari degli spazi vettoriali. Esempi

Sia  $E$  un insieme di infiniti elementi di natura qualsiasi, rappresentati con le lettere latine in grassetto, ed  $\mathbb{R}$  il campo dei numeri reali.

**Definizione 1.1.** Si dice che  $E$  è uno *spazio vettoriale* reale ed i suoi elementi chiamansi *vettori*, se esistono due leggi di composizione, una interna definita in  $E \times E$  ed a valori in  $E$  (*addizione*) e l'altra esterna definita in  $\mathbb{R} \times E$  ed a valori in  $E$  (*moltiplicazione* per un numero reale), tali che

- i) indicato additivamente con  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  e detto *somma* l'elemento che la legge di composizione interna associa alla coppia  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E \times E$ , sussistono  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E$  le proprietà:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} \\ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \\ \exists \mathbf{0} \in E : \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x} \\ \forall \mathbf{x} \in E, \exists \mathbf{x}' \in E : \mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

- ii) indicato moltiplicativamente e detto *prodotto* di  $a$  per  $\mathbf{x}$  il vettore che la legge di composizione esterna associa alla coppia  $(a, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times E$  sussistono  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  e  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$  le proprietà:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1\mathbf{x} = \mathbf{x} \\ a(b\mathbf{x}) = (ab)\mathbf{x} \\ (a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x} \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Il vettore  $\mathbf{0}$  neutro rispetto all'addizione ed il vettore  $\mathbf{x}'$ , associato ad ogni dato vettore  $\mathbf{x}$  a norma della (1.1)<sub>4</sub>, come subito si verifica, sono unici. Il primo dicesi *vettore nullo* e senza che ciò crei equivoci, s'indica con lo zero di  $\mathbb{R}$ ; il secondo dicesi *opposto* di  $\mathbf{x}$  e s'indica con  $-\mathbf{x}$ . La somma di un vettore  $\mathbf{x}$  e dell'opposto di un'altro  $\mathbf{y}$ , dicesi *differenza* tra  $\mathbf{x}$  ed  $\mathbf{y}$  e s'indica con  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ .

Un vettore  $\mathbf{y}$  dicesi *parallelo* (o *collineare*) ad un vettore  $\mathbf{x}$  se  $\mathbf{y} = m\mathbf{x}$  e, precisamente, *parallelo e concorde* se  $m \geq 0$ , *parallelo e discorde* se  $m \leq 0$ .

Si deducono poi agevolmente  $\forall \mathbf{x} \in E$  e  $\forall a \in \mathbb{R}$  le proprietà elementari:

$$\begin{cases} 0\mathbf{x} = \mathbf{0}, & a\mathbf{0} = \mathbf{0}, & (-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}, & a(-\mathbf{x}) = -a\mathbf{x} \\ a\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies & a = 0 \text{ oppure } \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (1.3)$$

che unite alle (1.1)-(1.2) mostrano che in uno spazio vettoriale valgono le regole dell'algebra ordinaria.

L'insieme  $\mathbb{R}^n$  delle  $n$ -ple ordinate di numeri reali  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$  – ove in  $x^i$ ,  $i$  funziona da indice e non da esponente – assume la struttura *naturale* di spazio vettoriale reale non appena si definiscano la somma e il prodotto ponendo:

$$\begin{cases} \mathbf{x} + \mathbf{y} = (x^1, x^2, \dots, x^n) + (y^1, y^2, \dots, y^n) = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \dots, x^n + y^n) \\ a\mathbf{x} = a(x^1, x^2, \dots, x^n) = (ax^1, ax^2, \dots, ax^n) \end{cases} \quad (1.4)$$

Altri esempi si ottengono considerando l'insieme dei numeri complessi o l'insieme delle funzioni reali definite e limitate in un intervallo. Basta adottare come leggi di composizione l'addizione ordinaria e la moltiplicazione ordinaria per un numero reale perché tali insiemi assumano la struttura di spazi vettoriali reali.

Se la legge di composizione esterna è definita in  $K \times E$ ,  $K$  essendo un campo qualsiasi,  $E$  dicesi spazio vettoriale su  $K$ . Noi ci riferiremo in seguito solo a spazi vettoriali reali e per tale motivo, spesso, sott'intenderemo la qualifica di reale.

#### 1.1.2 Dimensione e basi di uno spazio vettoriale

In uno spazio vettoriale  $E$ ,  $n$  vettori  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  diconsi *linearmente indipendenti* se – indicate con  $a^i$  delle costanti reali –

$$a^1\mathbf{x}_1 + a^2\mathbf{x}_2 + \dots + a^n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \implies a^1 = a^2 = \dots = a^n = 0 \quad (1.5)$$

in caso contrario diconsi *linearmente dipendenti*.

Un sistema di vettori contenente vettori linearmente dipendenti è linearmente dipendente e, pertanto, se  $n$  vettori sono linearmente indipendenti anche  $m$  qualsiasi tra essi lo sono e, in particolare, nessuno di essi è nullo. In uno spazio vettoriale possono presentarsi i seguenti due casi: 1) comunque si fissi un intero  $n$ , esistono  $n$  vettori linearmente indipendenti; 2) esiste un numero  $n$  tale che esistano almeno  $n$  vettori linearmente indipendenti ma è linearmente dipendente ogni sistema di  $n + 1$  vettori.

Nel primo caso  $E$  dicesi *ad infinite dimensioni*, nel secondo invece dicesi *ad  $n$  dimensioni* e s'indica con  $E_n$ , il massimo  $n$  per l'ordine dei sistemi indipendenti costituendo la *dimensione* di  $E$ , ed ogni sistema di  $n$  vettori indipendenti dicesi *base* di  $E$ . Noi, qui e nel seguito, prenderemo in esame solo spazi ad un numero finito di dimensioni.

**Proprietà 1.1.** In uno spazio vettoriale  $E$ ,  $n$  vettori costituiscono una base se e solo se ogni vettore si esprime in uno ed un solo modo come loro combinazione lineare.



Se  $\{\mathbf{e}_i\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  è una base di  $E$ , il sistema  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) - \forall \mathbf{x} \in E$  - è linearmente dipendente onde:

$$\lambda \mathbf{x} + a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

con  $\lambda, a^1, \dots, a^n$  costanti, non tutte nulle, associate ad  $\mathbf{x}$ . Anzi, l'indipendenza dei vettori  $\mathbf{e}_i$  implica  $\lambda \neq 0$ , onde:

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + \dots + x^n \mathbf{e}_n \quad x^i = -\frac{a^i}{\lambda}$$

I coefficienti  $x^i$  sono poi univocamente determinati giacché se fosse anche  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n y^i \mathbf{e}_i$ , per differenza seguirebbe,  $\sum_{i=1}^n (x^i - y^i) \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ , il che, per l'indipendenza dei vettori  $\mathbf{e}_i$  implicherebbe  $x^i = y^i \forall i$ . La condizione è dunque necessaria e non resta che provarne la sufficienza.

Sia  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  un sistema di  $n$  vettori tali che per ogni vettore  $\mathbf{x} \in E$  esistano  $n$  costanti reali  $\lambda^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) univocamente determinate, tali che:

$$\mathbf{x} = \lambda^1 \varepsilon_1 + \lambda^2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda^n \varepsilon_n \tag{1.6}$$

Poiché il vettore nullo si ottiene per, e solo per,  $\lambda^1 = \lambda^2 = \dots = \lambda^n = 0$ , i vettori  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  sono indipendenti e pertanto resta da provare che non esistono sistemi indipendenti costituiti da  $n + 1$  vettori. Ciò, d'altra parte, segue dal fatto che comunque si prendano  $n + 1$  vettori  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n+1})$ , se  $n$  fra essi - ad es. i primi  $n$  - fossero indipendenti, esisterebbero, per la (1.6),  $n^2$  costanti  $a_i^j$  con  $\det \|a_i^j\| \neq 0$  tali che il sistema:

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^n a_i^j \varepsilon_j \quad i = 1, \dots, n$$

sarebbe invertibile e, per la (1.6), il generico vettore  $\mathbf{x}$  e quindi anche  $\mathbf{u}_{n+1}$  sarebbe esprimibile come combinazione lineare di  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ .

Come applicazione della proprietà precedente, si ricava subito che lo spazio  $\mathbb{R}^n$  ha  $n$  dimensioni. Infatti, stanti le (1.4), qualunque sia  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$  si ha univocamente  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x^i \mathbf{e}_i$  con:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1) \tag{1.7}$$

donde la dimensione è  $n$  ed i vettori (1.7) costituiscono una base (*base canonica*) di  $\mathbb{R}^n$ .

### 1.1.3 Cambiamenti di base in $E_n$ . Legge di controvarianza

**Definizione 1.2.** Diconsi *componenti controvarianti* di un vettore  $\mathbf{x}$  in una base  $\{\mathbf{e}_i\}$ , i numeri  $x^i$ , univocamente determinati, tali che:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x^i \mathbf{e}_i \tag{1.8}$$

e la (1.8) dicesi *decomposizione* del vettore  $\mathbf{x}$  secondo la base  $\{\mathbf{e}_i\}$ .

Indicate con  $\{\mathbf{e}_i\}$  e  $\{\mathbf{e}_{i'}\}$  due basi di  $E_n$  e con  $A_i^{i'}$  le componenti di  $\mathbf{e}_i$  in  $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ , si ha la *legge di trasformazione delle basi* cioè:

$$\mathbf{e}_i = \sum_{i'=1}^n A_i^{i'} \mathbf{e}_{i'} \quad (1.9)$$

**Definizione 1.3.** La matrice  $\|A_i^{i'}\|$  (ove l'indice superiore è di riga), dicesi *matrice del cambiamento di base* (1.9) ed il determinante  $\Delta = \det \|A_i^{i'}\|$  dicesi *modulo del cambiamento di base*.

Si noti che, per l'indipendenza dei vettori  $\mathbf{e}_{i'}$ , è  $\Delta \neq 0$ , cioè la matrice  $\|A_i^{i'}\|$  è regolare.

Indicate con  $A_{i'}^i$  le componenti di  $\mathbf{e}_{i'}$  in  $\{\mathbf{e}_i\}$ , la trasformazione inversa della (1.9) è:

$$\mathbf{e}_{i'} = \sum_{i=1}^n A_{i'}^i \mathbf{e}_i \quad (1.10)$$

ove la matrice  $\|A_{i'}^i\|$  è l'inversa di  $\|A_i^{i'}\|$  il che, introdotto il *simbolo di Kronecker*:

$$\delta_i^k = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k \\ 1 & \text{se } i = k \end{cases} \quad (1.11)$$

si scrive:

$$\sum_{h'=1}^n A_i^{h'} A_{h'}^k = \delta_i^k \quad (1.12)$$

Un vettore  $\mathbf{x}$ , essendo un ente intrinseco, non vara al variare delle basi. Variano invece le sue componenti e se  $x^i$  sono quelle in  $\{\mathbf{e}_i\}$  ed  $x^{i'}$  quelle in  $\{\mathbf{e}_{i'}\}$  da:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x^i \mathbf{e}_i = \sum_{i'=1}^n x^{i'} \mathbf{e}_{i'} \quad (1.13)$$

per la (1.10) segue:

$$\left( x^i - \sum_{i'=1}^n A_{i'}^i x^{i'} \right) \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$$

e, per l'indipendenza dei vettori  $\mathbf{e}_i$ :

$$x^i = \sum_{i'=1}^n A_{i'}^i x^{i'} \quad (1.14)$$

Il confronto tra la (1.9) e la (1.14) mostra che, mentre il passaggio dalla base  $\{\mathbf{e}_{i'}\}$  alla base  $\{\mathbf{e}_i\}$  è retto dalla matrice  $\|A_i^{i'}\|$ , quello dalle *componenti*  $x^{i'}$  alle  $x^i$  è retto dalla matrice inversa. È per tale motivo che alle componenti  $x^i$  si dà la qualifica di *controvarianti* e la (1.14) dicesi *legge di controvarianza*. Le inverse delle (1.14) sono poi, ovviamente, le:

$$x^{i'} = \sum_{i=1}^n A_i^{i'} x^i \quad (1.15)$$

Dalla legge di controvarianza seguono immediatamente le:

**Proprietà 1.2.** Un vettore  $\mathbf{x}$  è completamente caratterizzato dalle sue componenti su una prefissata base e dalla legge con cui queste si trasformano.

**Proprietà 1.3.** Condizione necessaria e sufficiente affinché sia:

$$\mathbf{x} = \sum_{h=1}^n \lambda^h \mathbf{y}_h \quad \mathbf{x}, \mathbf{y}_h \in E_n, \lambda^h \in \mathbb{R} \quad (1.16)$$

è che esista una base  $\{\mathbf{e}_i\}$  di  $E_n$  tale che – indicata con  $x^i$  ed  $y_h^i$  le componenti di  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}_h$  in  $\{\mathbf{e}_i\}$  – si abbia:

$$x^i = \sum_{h=1}^n \lambda^h y_h^i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (1.17)$$

#### 1.1.4 Convenzione sugli indici ripetuti

Nei numeri precedenti si è presentata ripetutamente la presenza di sommatorie effettuate rispetto ad un indice ripetuto che figura una volta come indice superiore ed una volta come indice inferiore. Poiché tale circostanza ricorre sovente, per alleggerire le notazioni, si applica la seguente *convenzione di Einstein*:

*Ogni qualvolta in un monomio compare due volte lo stesso indice, una volta come indice superiore ed una volta come indice inferiore, si deve sottintendere il segno di sommatoria rispetto a quell'indice.*

Seguendo la convenzione precedente le (1.9), (1.10), (1.12), (1.14) e (1.15) si scrivono, ad esempio, rispettivamente:

$$\mathbf{e}_i = A_i^{i'} \mathbf{e}_{i'}, \quad \mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^i \mathbf{e}_i, \quad A_i^{h'} A_{h'}^k = \delta_i^k, \quad x^i = A_{i'}^i x^{i'}, \quad x^{i'} = A_i^{i'} x^i \quad (1.18)$$

Un *indice* ripetuto dicesi *muto* o *saturato* e, ovviamente, si può indicare con una lettera qualsiasi; gli indici non muti diconsi *liberi*.

Ad esempio, nella (1.18)<sub>1</sub>,  $i'$  è muto ed  $i$  è libero e si può anche scrivere  $\mathbf{e}_i = A_i^{h'} \mathbf{e}_{h'}$ .

Nell'applicare la convenzione di Einstein occorre tener conto delle seguenti precauzioni:

- 1) *Non ripetere gli indici muti.* Ad esempio, la scrittura  $A_j^i B x^i$  non ha senso;
- 2) *Se si vuole indicare che il prodotto  $A^i B_j$  vale 1 quando  $i$  e  $j$  sono uguali, occorre scrivere esplicitamente:  $A^i B_j = 1$  per  $i = j$  e non  $A^i B_i = 1$  che significa invece  $\sum_{i=1}^n A^i B_i = 1$ .* Ad esempio, di tale precauzione si è già tenuto conto nella (1.12).

## 1.1.5 Sottospazi. Sottospazi supplementari

**Definizione 1.4.** Ogni parte non vuota  $V$  di uno spazio vettoriale  $E_n$  dicesi *sottospazio* di  $E_n$  se:

$$\begin{cases} \mathbf{x} \in V, \mathbf{y} \in V \implies \mathbf{x} + \mathbf{y} \in V \\ \mathbf{x} \in V, a \in \mathbb{R} \implies a\mathbf{x} \in V \end{cases} \quad (1.19)$$

In particolare, per  $a = 0$ , la (1.19)<sub>2</sub> implica che ogni sottospazio contiene il vettore nullo. Si verifica poi subito che ogni sottospazio  $V$  di  $E_n$ , quando si adottano in  $V$  le stesse leggi di composizione di  $E_n$ , assume la struttura di spazio vettoriale.

**Proprietà 1.4.** L'insieme delle combinazioni lineari di  $r$  vettori indipendenti è un sottospazio ad  $r$  dimensioni.

Sia  $V$  l'insieme dei vettori  $\mathbf{x} \in E_n$  tali che:

$$\mathbf{x} = a^1 \mathbf{u}_1 + a^2 \mathbf{u}_2 + \dots + a^r \mathbf{u}_r, \quad (1.20)$$

con  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  vettori indipendenti e con  $a^i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, r\}$ . Ovviamente sono soddisfatte le (1.19),  $V$  ha dimensione  $r$  ed  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r)$  ne è una base [cfr. Proprietà 1.1]. Dalla proprietà precedente segue che ogni vettore  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  genera, per combinazione lineare, un sottospazio ad 1 dimensione costituito dai vettori di  $E_n$  collineari ad  $\mathbf{x}$ , cioè del tipo  $a\mathbf{x}, \forall a \in \mathbb{R}$ ; due vettori non collineari  $\mathbf{x}$  ed  $\mathbf{y}$  generano un sottospazio a due dimensioni e così via.

**Definizione 1.5.** Due sottospazi  $E_p$  ed  $E_q$  di  $E_n$  diconsi *supplementari* se:

$$\begin{cases} E_p \cap E_q = \{\mathbf{0}\} \\ p + q = n \end{cases} \quad (1.21)$$

**Proprietà 1.5.** Se  $E_p$  ed  $E_q$  sono sottospazi supplementari di  $E_n$ , ogni vettore  $\mathbf{x}$  di  $E_n$  può decomporre univocamente nella somma di un vettore di  $E_p$  e di uno di  $E_q$ .

Se  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$  è una base di  $E_p$  e  $(\boldsymbol{\varepsilon}_{p+1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)$  è una base di  $E_q$ ,  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_{p+1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)$  è una base di  $E_n$ . Infatti si ha:

$$\begin{aligned} a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^p \mathbf{e}_p + b^{p+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{p+1} + \dots + b^n \boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{0} &\iff \\ a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^p \mathbf{e}_p = -b^{p+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{p+1} - \dots - b^n \boldsymbol{\varepsilon}_n \in E_p \cap E_q & \end{aligned}$$

il che implica  $a^1 = a^2 = \dots = a^p = b^{p+1} = \dots = b^n = 0$ . Qualunque sia poi  $\mathbf{x} \in E_n$  – indicate con  $(\lambda^1, \dots, \lambda^p, \gamma^{p+1}, \dots, \gamma^n)$  le sue componenti in  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_{p+1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)$  – si ha la decomposizione  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$  con  $\mathbf{x}_1 = \lambda^1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda^p \mathbf{e}_p \in E_p$ ,  $\mathbf{x}_2 = \gamma^{p+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{p+1} + \dots + \gamma^n \boldsymbol{\varepsilon}_n \in E_q$  ed essa è unica giacché se fosse anche  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'_1 + \mathbf{x}'_2$  – con  $\mathbf{x}'_1 \in E_p$  e  $\mathbf{x}'_2 \in E_q$  – per differenza seguirebbe:

$$(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}_1) + (\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0} \iff E_p \ni \mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'_2 \in E_q$$

onde  $\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_2 = \mathbf{x}_2$ .

1.1.6 Applicazioni lineari tra spazi vettoriali

**Definizione 1.6.** Un'applicazione  $\tau$ , di uno spazio vettoriale  $E$  in uno spazio vettoriale  $H$ , che soddisfi le condizioni:

$$\begin{cases} \tau(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \tau(\mathbf{x}_1) + \tau(\mathbf{x}_2) & \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E \\ \tau(a\mathbf{x}) = a\tau(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in E, a \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.22)$$

dicesi *applicazione lineare* di  $E$  in  $H$  e, in particolare, *endomorfismo* di  $E$  per  $H = E$  e *forma lineare* su  $E$  per  $H = \mathbb{R}$ .

**Definizione 1.7.** Un'applicazione lineare biettiva di uno spazio vettoriale  $E$  su uno spazio vettoriale  $H$  dicesi *isomorfismo* di  $E$  su  $H$  e, in particolare, *automorfismo* se  $H = E$ .

Supposto che  $E$  ed  $H$  abbiano la stessa dimensione  $n$  ed indicate con  $\{\mathbf{e}_i\}$  ed  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}$  – rispettivamente – una loro base, si ha:

**Proprietà 1.6.** Tra due spazi  $E_n$  ed  $H_n$  le applicazioni:

$$\tau : \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i \in E_n \longmapsto \mathbf{w} = x^i \boldsymbol{\varepsilon}_i \in H_n \quad (1.23)$$

esauriscono, al variare delle basi, gli isomorfismi di  $E_n$  su  $H_n$ .

Basta osservare che la (1.23) è lineare e che associa ad una base  $\{\mathbf{e}_i\}$  di  $E_n$  una base  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}$  di  $H_n$ . Sussiste infatti la seguente

**Proprietà 1.7.** Un'applicazione lineare di uno spazio  $E_n$  in uno di egual dimensione  $H_n$  è un isomorfismo se e solo se ad una base almeno di  $E_n$  associa una base di  $H_n$ .

Essendo:

$$\tau(\mathbf{x}) = \tau(\mathbf{x} + \mathbf{0}) = \tau(\mathbf{x}) + \tau(\mathbf{0}) \quad \forall \mathbf{x} \in E_n$$

in un isomorfismo  $\tau$  di  $E_n$  su  $H_n$ , il vettore nullo di  $H_n$  è associato al solo vettore nullo di  $E_n$  e pertanto:

$$\tau(x^i \mathbf{e}_i) = x^i \tau(\mathbf{e}_i) = \mathbf{0} \iff x^i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

cioè gli  $n$  vettori  $\tau(\mathbf{e}_i) \in H_n$  sono indipendenti.

Viceversa  $\tau$  sia lineare ed il sistema  $\{\tau(\mathbf{e}_i)\}$  sia una base di  $H_n$ . Essendo:

$$\mathbf{w} = w^i \tau(\mathbf{e}_i) = \tau(w^i \mathbf{e}_i) \quad \forall \mathbf{w} \in H_n$$

con le  $w^i$  univocamente determinate,  $\tau$  è un isomorfismo.

1.1.7 Spazio duale. Legge di covarianza

Sia  $E^*$  l'insieme delle forme lineari  $\varphi$  sullo spazio  $E_n$ . Ponendo

$$\begin{cases} \varphi_1 + \varphi_2 : \mathbf{x} \in E_n \mapsto \varphi_1(\mathbf{x}) + \varphi_2(\mathbf{x}) & \forall \varphi_1, \varphi_2 \in E^* \\ a\varphi : \mathbf{x} \in E_n \mapsto a\varphi(\mathbf{x}) & \forall \varphi \in E^*, a \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.24)$$

si ottengono, come agevolmente si verifica, forme lineari su  $E_n$  e si dà ad  $E^*$  la struttura naturale di spazio vettoriale, detto *duale* di  $E_n$ .

Se  $\{\mathbf{e}_i\}$  è una base di  $E_n$ ,  $\forall \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i \in E_n$ , si ha:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x^i \mathbf{e}_i) = x^i \varphi(\mathbf{e}_i)$$

cioè:

$$\varphi(\mathbf{x}) = x^i \varphi_i \quad (1.25)$$

con le:

$$\varphi_i = \varphi(\mathbf{e}_i) \quad (1.26)$$

e pertanto *una forma è completamente determinata dai valori che associa ai vettore di una base*. Tale osservazione consente di provare che:

**Proprietà 1.8.** Lo spazio duale  $E^*$  di una spazio vettoriale  $E_n$  ha la stessa dimensione di  $E_n$  e le  $n$  forme  $\mathbf{e}^{*i}$  definite da:

$$\mathbf{e}^{*i}(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (1.27)$$

ne costituiscono una *base* che dicesi *duale* di quella  $\{\mathbf{e}_i\}$  di  $E_n$ .

Qualunque sia la forma  $\varphi$  si ha infatti:

$$\varphi = \varphi_i \mathbf{e}^{*i} \quad (1.28)$$

giacché essendo:

$$\varphi_i \mathbf{e}^{*i}(\mathbf{e}_h) = \varphi_i \delta_h^i = \varphi_h \quad \forall \mathbf{e}_h \in \{\mathbf{e}_i\}$$

Le forme a primo e secondo membro associano ai vettori di  $\{\mathbf{e}_i\}$  gli stessi valori. L'indipendenza delle  $n$  forme  $\mathbf{e}^{*i}$  si prova poi subito giacché, per le (1.27), si ha:

$$a_i \mathbf{e}^{*i} = 0 \iff a_i \mathbf{e}^{*i}(\mathbf{e}_h) = a_i \delta_h^i = a_h = 0 \quad \forall h$$

Dalla (1.28) segue che i valori  $\varphi_i$  che la forma  $\varphi$  associa agli elementi di una base  $\{\mathbf{e}_i\}$  di  $E_n$  sono proprio le componenti controvarianti di  $\varphi$  sulla base  $\{\mathbf{e}^{*i}\}$ , duale di  $\{\mathbf{e}_i\}$ . Pertanto le componenti di  $\varphi$  in  $\{\mathbf{e}^{*i'}\}$ , base di  $E_n^*$  duale di un'altra base  $\{\mathbf{e}_{i'}\}$  di  $E_n$ , sono:

$$\varphi_{i'} = \varphi(\mathbf{e}_{i'})$$

ed esse sono legate alle  $\varphi_i$  dalle:

$$\begin{cases} \varphi_{i'} = A_{i'}^i \varphi_i \\ \varphi_i = A_i^{i'} \varphi_{i'} \end{cases} \quad (1.29)$$

Dalla (1.26) segue infatti:

$$\varphi(\mathbf{x}) = x^i \varphi_i = x^{i'} \varphi_{i'}$$

onde la (1.15) implica la (1.29). Il confronto tra la (1.29)<sub>1</sub> e la (1.10) mostra che le componenti dei vettori di  $E_n^*$  sono covarianti con le basi di  $E_n$  e per tale motivo tali vettori diconsi *covarianti* mentre quelli di  $E_n$  diconsi *controvarianti*; la (1.29) dicesi poi *legge di covarianza*. È chiaro inoltre che dovendo le  $\varphi_i$  essere controvarianti con le basi di  $E_n^*$  – come avviene in ogni spazio vettoriale – le basi di  $E_n^*$  si trasformano secondo le:

$$\mathbf{e}^{*i'} = A_i^{i'} \mathbf{e}^{*i} \quad \mathbf{e}^{*i} = A_{i'}^i \mathbf{e}^{*i'} \quad (1.30)$$

#### 1.1.8 Orientamenti di uno spazio. Scalari e vettori dispari

In ogni spazio vettoriale si introduce la nozione di basi concordi o discordi definendo concordi le basi a modulo di trasformazione positivo e discordi quelle a modulo di trasformazione negativo. Detto  $B$  l'insieme delle basi di  $E_n$ , in  $B$  – come subito si verifica – si introduce una relazione di equivalenza definendo equivalenti due basi concordi. In tal modo  $B$  si divide in due classi di equivalenza – dette *orientamenti* di  $E_n$  e chiamate, ad arbitrio, l'una  $B^+$  orientamento positivo e l'altra  $B^-$  orientamento negativo – costituite da basi, concordi tra loro, ciascuna delle quali però è discorde con tutte le basi dell'altra classe. Lo spazio  $E_n$  munito delle sole basi di  $B^+$  o delle sole basi di  $B^-$  dicesi rispettivamente *orientato positivamente* o *negativamente* e s'indica con  $E_n^+$  o, nell'ordine,  $E_n^-$ . Ogni base di  $E_n$  – individuando una delle due basi  $B^+$  e  $B^-$  – attribuisce ad  $E_n$  un orientamento. È facile verificare poi che, sia lo scambio tra due vettori della base che il mutare negli opposti un numero dispari di questi, altera l'orientamento.

Esistono grandezze che hanno carattere intrinseco solo in  $E_n^+$  o solo in  $E_n^-$ , ma non in tutto  $E_n$ . A tale categoria appartengono sia gli *scalari dispari* (pseudoscalari) che i *vettori dispari* (pseudovettori). Si chiamano infatti *scalari dispari* le grandezze scalari associate ad elementi di  $E_n$  che si mutano nell'opposto quando  $E_n$  cambia di orientamento. Analogamente diconsi *vettori dispari* (o pseudovettori) gli enti che hanno carattere vettoriale – cioè verificano la (1.17) – sia in  $E_n^+$  che, separatamente, in  $E_n^-$  ma che cambiano di segno quando  $E_n$  cambia di orientamento. In seguito avremo esempi sia di scalari che di vettori dispari.

## 1.2.1 Assiomi degli spazi pseudoeuclidei

**Definizione 1.8.** Uno spazio vettoriale  $E_n$  dicesi *pseudoeuclideo* se, in  $E_n \times E_n$  è definita un'applicazione a valori reali (*moltiplicazione scalare*) tale che, indicato con  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  il numero reale (*prodotto scalare*) che essa associa alla generica coppia  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E_n \times E_n$ , sussistono  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_n, a \in \mathbb{R}$  – gli assiomi:

$$\begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \\ a(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = ax \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot ay \\ \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in E_n \implies \mathbf{y} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (1.31)$$

**Proprietà 1.9.** Uno spazio  $E_n$  assume la struttura di spazio pseudoeuclideo se e solo se si assegna, associata ad una base  $\{\mathbf{e}_i\}$ , una matrice quadrata  $\|g_{ij}\|$ , regolare e simmetrica di ordine  $n$ , e si definisce il prodotto scalare attraverso la forma bilineare fondamentale:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g_{ij}x^i y^j \quad \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i, \mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j \quad (1.32)$$

ponendo, in particolare:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ij} \quad (1.33)$$

Se  $E_n$  è pseudoeuclideo – introdotta una base  $\{\mathbf{e}_i\}$  e definite le  $g_{ij}$  attraverso la (1.33) – per le prime tre delle (1.31), sussiste la (1.32) con la matrice  $\|g_{ij}\|$  simmetrica. La regolarità di questa poi è tradotta dalla (1.31)<sub>4</sub>. Infatti la (1.31)<sub>4</sub> è equivalente alla:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{y} = g_{ij}y^j = 0 \quad \forall i \implies \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (1.34)$$

il che è possibile se e solo se:

$$g = \det \|g_{ij}\| \neq 0 \quad (1.35)$$

Viceversa, alla base  $\{\mathbf{e}_i\}$  sia associata una matrice quadrata  $\|g_{ij}\|$  di ordine  $n$ , simmetrica e regolare. Definito il prodotto scalare attraverso la forma (1.32), per la linearità di questa e per la simmetria delle  $g_{ij}$ , risultano verificate le prime tre delle (1.31). L'ipotesi di regolarità (1.35), implicando la (1.34), assicura poi la (1.31)<sub>4</sub>.

Due vettori  $\mathbf{x}$  ed  $\mathbf{y}$  tali che  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ , si dicono *ortogonali*. Ne segue subito, per la (1.34), che la (1.31)<sub>4</sub> richiede che il *solo vettore nullo* sia ortogonale ad  $n$  vettori indipendenti. Diconsi poi *norma*  $\|\mathbf{x}\|$  e *modulo*  $x$ , oppure  $|\mathbf{x}|$  di un vettore  $\mathbf{x}$ , gli scalari:

$$\|\mathbf{x}\| = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = g_{ij}x^i x^j \geq 0, \quad x = \sqrt{\|\mathbf{x}\|} = \sqrt{|g_{ij}x^i x^j|} \geq 0 \quad (1.36)$$

ed i vettori di norma uguale a  $\pm 1$ , cioè di modulo unitario, diconsi *normali* (o *unitari*).



Si osservi infine che – dovendo il prodotto scalare essere intrinseco – risulta determinata la legge di trasformazione delle  $g_{ij}$  al variare delle basi. Infatti se  $\{\mathbf{e}_{i'}\}$  è un'altra base, si ha:

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = A_i^{i'} A_j^{j'} \mathbf{e}_{i'} \cdot \mathbf{e}_{j'} = A_i^{i'} A_j^{j'} g_{i'j'} \quad (1.37)$$

da cui, in particolare,  $g = \Delta^2 g'$ , con  $g' = \det \|g_{i'j'}\| \neq 0$ .

### 1.2.2 Componenti covarianti

**Definizione 1.9.** I prodotti scalari  $x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) diconsi **componenti covarianti** di  $\mathbf{x}$  nella base  $\{\mathbf{e}_i\}$ .

Da  $\mathbf{x} = x^j \mathbf{e}_j$ , moltiplicando scalarmente per  $\mathbf{e}_i$ , segue:

$$x_i = g_{ij} x^j \iff x^i = g^{ij} x_j \quad (1.38)$$

con  $g^{ij}$  reciproco di  $g_{ij}$ , e pertanto c'è corrispondenza biunivoca tra la  $n$ -pla delle componenti covarianti e quella delle componenti controvarianti, cioè *esiste uno ed un solo vettore avente per componenti covarianti, in una data base, una prefissata  $n$ -pla*.

L'appellativo di "covarianti" che si dà alle  $x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i$  risulta giustificato dal fatto che esse si trasformano con la stessa legge con cui si trasformano le basi. Infatti, se  $\{\mathbf{e}_{i'}\}$  è un'altra base, si ha:

$$x_{i'} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^i \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i$$

cioè:

$$x_{i'} = A_{i'}^i x_i \iff x_i = A_i^{i'} x_{i'} \quad (1.39)$$

Stanti le (1.38), ogni relazione tra vettori si può esprimere in funzione delle sole componenti controvarianti, delle sole componenti covarianti o in forma mista. Ad esempio per il prodotto scalare si ha:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g_{ij} x^i y^j = x^i y_i = g^{ij} x_i y_j \quad (1.40)$$

### 1.2.3 Identificazione di uno spazio pseudoeuclideo con il proprio duale

Indicata con  $\{\mathbf{e}_i\}$  ed  $\{\mathbf{e}^{*i}\}$ , rispettivamente, una base di uno spazio pseudoeuclideo  $E_n$  e la duale in  $E_n^*$ , le forme lineari:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^* = g_{ij} \mathbf{e}^{*j} \quad g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (1.41)$$

costituiscono una base di  $E_n^*$  covariante con  $\{\mathbf{e}_i\}$ . Infatti – essendo  $g = \det \|g_{ij}\| \neq 0$  –  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_i^*\}$  è una base di  $E_n^*$  e se  $\{\mathbf{e}_{i'}\}$  è un'altra base di  $E_n$ , per la (1.18)<sub>3</sub> e per la (1.37) si ha:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^* = A_i^{i'} A_j^{j'} A_{k'}^j g_{i'j'} \mathbf{e}^{*k'} = A_i^{i'} \delta_{k'}^j g_{i'j'} \mathbf{e}^{*k'} = A_i^{i'} g_{i'j'} \mathbf{e}^{*j} = A_i^{i'} \boldsymbol{\varepsilon}_{i'}^* \quad (1.42)$$

Consideriamo ora l'applicazione di  $E_n$  in  $E_n^*$ :

$$\tau : \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i \in E_n \longmapsto \varphi = x^i \boldsymbol{\varepsilon}_i^* \in E_n^* \quad (1.43)$$

La (1.43) è del tipo (1.23) e, pertanto, è un isomorfismo di  $E_n$  su  $E_n^*$  ed associa agli elementi di  $\{\mathbf{e}_i\}$  gli omologhi di  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}$ . Poiché, inoltre, le basi  $\{\mathbf{e}_i\}$  e  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_i^*\}$  si trasformano con la stessa legge, la corrispondenza stabilita dall'isomorfismo (1.43) è intrinseca, cioè vettori corrispondenti hanno le stesse componenti su una qualsiasi coppia di basi associate. È proprio per tale motivo che l'isomorfismo (1.43) consente di identificare ogni  $E_n$  pseudoeuclideo col proprio duale, identificando gli elementi associati, ed a tale scopo basta porre:

$$\mathbf{e}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i^* \quad (1.44)$$

cioè:

$$\mathbf{e}_i = g_{ij} \mathbf{e}^{*j} \iff \mathbf{e}^{*i} = g^{ij} \mathbf{e}_j \quad (1.45)$$

#### 1.2.4 Spazi vettoriali euclidei

**Definizione 1.10.** Dicesi *euclideo* ogni spazio pseudoeuclideo  $E_n$  tale che:

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \implies \|\mathbf{x}\| > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in E_n \quad (1.46)$$

Uno spazio pseudoeuclideo è dunque euclideo solo se la forma quadratica (1.36)<sub>1</sub> – detta *metrica o forma quadratica fondamentale di  $E_n$*  – è definita positiva e, pertanto, se il solo vettore nullo ha norma (e modulo) nulli. In ogni  $E_n$  euclideo sussistono le proprietà:

**Proprietà 1.10.** Il modulo del prodotto non supera il prodotto dei moduli dei fattori (*disuguaglianza di Schwarz*).

**Proprietà 1.11.** Il modulo della somma non supera la somma dei moduli degli addendi (*disuguaglianza triangolare*).

Si ha:

$$\|\lambda \mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \lambda^2 \|\mathbf{x}\| + 2\lambda \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\| \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

e pertanto  $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ , onde la disuguaglianza di Schwarz:

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad (1.47)$$

dalla quale segue poi:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$$

onde la disuguaglianza triangolare:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad (1.48)$$

La disuguaglianza (1.47) consente di definire l'*angolo*  $\widehat{\mathbf{x}\mathbf{y}}$  tra due vettori non nulli  $\mathbf{x}$  ed  $\mathbf{y}$  ponendo:

$$\cos \widehat{\mathbf{x}\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_n - \{\mathbf{0}\} \quad (1.49)$$

Infatti, per la (1.47), il modulo del secondo membro non supera 1 e pertanto esiste uno ed un solo angolo  $\varphi = \widehat{\mathbf{x}\mathbf{y}} \in [0, \pi]$  per cui vale la (1.49). A seconda che  $\widehat{\mathbf{x}\mathbf{y}} = 0$  oppure  $\widehat{\mathbf{x}\mathbf{y}} = \pi$  si dice che  $\mathbf{x}$  ed  $\mathbf{y}$  hanno lo stesso orientamento o orientamento opposto; se uno dei vettori è nullo, l'angolo è indeterminato.

### 1.2.5 Basi ortonormali

**Definizione 1.11.** Un sistema di vettori  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$  di uno spazio pseudoeuclideo, dicesi *ortonormale* se

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \pm \delta_{ij} = \begin{cases} \pm 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (1.50)$$

**Proprietà 1.12.** I vettori di un sistema ortonormale sono linearmente indipendenti.

Per le (1.50) infatti si ha:

$$a^i \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \implies a^i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \iff a^j = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

La proprietà precedente implica  $m \leq n$ ; se  $m = n$ , il sistema  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  costituisce una *base ortonormale*. Notevoli sono i vantaggi che porta il riferire un  $E_n$  pseudoeuclideo a basi ortonormali e tali vantaggi derivano dalla:

**Proprietà 1.13.** Tra le componenti omonime covarianti e controvarianti di un generico vettore  $\mathbf{x}$  in una base ortonormale  $\{\mathbf{e}_i\}$ , sussiste la relazione

$$x^i = \pm x_i \quad (1.51)$$

ove il segno va preso concordemente con la  $\|\mathbf{e}_i\| = \pm 1$ .

In un  $E_n$  euclideo, non vi è dunque differenza tra le componenti omonime covarianti e controvarianti in una base ortonormali ed esse vengono chiamate semplicemente *ortonormali*. Il prodotto scalare, la norma, il modulo e la identificazione (1.45) assumono poi, in componenti ortonormali, le seguenti espressioni ridotte, *invarianti* rispetto ai cambiamenti di base ortonormali

$$\begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \dots + x^n y^n \\ \|\mathbf{x}\| = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2 \\ x = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2} \\ \mathbf{e}_i = \mathbf{e}^{*i} \end{cases} \quad (1.52)$$

Se  $E_n$  non è euclideo, tra gli elementi di una base ortonormale  $\{\mathbf{e}_i\}$ , ve ne sono alcuni aventi per norma  $-1$ . Supposto, come è lecito, che tali vettori siano  $\mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_n$  ( $p \leq n$ ), dalla (1.40) e dalla (1.51), seguono le relazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^1 y^1 + \dots + x^p y^p - x^{p+1} y^{p+1} - \dots - x^n y^n \\ \|\mathbf{x}\| = (x^1)^2 + \dots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \dots - (x^n)^2 \end{cases} \quad (1.53)$$