MATEMATICHE COMPLEMENTARI

FONDAMENTI, STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA

19

MATEMATICHE COMPLEMENTARI

FONDAMENTI, STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA

La matematica altri non è che il lato esatto del nostro pensiero.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer

La collana è dedicata a studi e ricerche sui Fondamenti, sulla Storia e sulla Didattica della Matematica, dando rilievo agli aspetti culturali di questa disciplina, cogliendone le variegate espressioni e approfondendo la sua incidenza nella formazione umana e disciplinare. La collana, perciò, accoglie:

— studi sui Fondamenti della Matematica e la loro storia;
— ricerche di Storia della Matematica (sviluppo storico di idee e metodi, corrispondenze tra matematici, edizioni critiche di manoscritti, ecc. . .);
— proposte di percorsi dai contenuti storici a una loro riproposizione didattica;
— scritti di divulgazione dei contenuti matematici e della loro incidenza nello sviluppo di altre scienze;
— riflessioni sugli aspetti generali della Didattica della Matematica (dall'antropologia alle scienze psico-pedagogiche e alle neuroscienze);
— proposte di Didattica della Matematica relative a modalità differenti di attività didattiche in una classe di alunni;
— proposte di Didattica della Matematica con l'uso costante di nuove tecnologie.

Per l'eventuale inserimento in collana, ogni opera viene sottoposta alla valutazione del Comitato Scientifico e di esperti del settore, qualora necessario.

EMILIA FLORIO
LUIGI MAIERÙ

LE COSTRUZIONI GEOMETRICHE

UN PERCORSO STORICO–DIDATTICO TRA I MATEMATICI ARABI DEI SECC. IX–XIII

PARTE SECONDA

aracne

aracne

ISBN
979-12-218-0604-5

PRIMA EDIZIONE
ROMA 27 MARZO 2023

Indice

Introduzione

Nella prima parte del nostro percorso storico-didattico abbiamo analizzato elaborazioni di matematici arabi dei secc. IX-X, lette nel contesto delle costruzioni geometriche[1]; nella seconda parte prendiamo in esame elaborazioni di matematici arabi dei secc. XI-XIII.

In questi secoli si afferma fruttuosamente il grande lavoro culturale che trova nella Casa della Saggezza di Bagdad la sua sorgente e la sua forza, tanto da irradiarsi nelle regioni circostanti in breve tempo.

La realizzazione della Casa della Saggezza, centro di attività culturali, avviene in un tempo di riappacificazione di popoli differenti che abitano quelle regioni, quando è possibile curare la formazione delle menti e dei cuori tenendo lontano guerre e lotte tra tribù e tra popoli.

Nello stesso tempo, l'espandersi del dominio arabo in tante altre regioni, da quelle lungo le sponde del Mare Mediterraneo a quelle che si trovano a Est, a Nord e a Sud di Bagdad, comporta molto spargimento di sangue, come avviene nel corso di ogni guerra in cui si mira al dominio di un territorio e della popolazione che lo abita. Nonostante questo, una volta consolidato il potere socio-economico e politico, sorgono anche in queste regioni alcuni centri di studio, il cui retaggio è arrivato fino ai nostri giorni.

Prima di analizzare la produzione scientifica di matematici arabi dei secc. XI-XIII, facciamo brevemente riferimento ai luoghi in cui si svolge la loro attività.

Il persiano Abū Said Ahmad ibn Muhammad ibn Abd al-Jalil al-Sijzī (945-1020) svolge la propria attività di scienziato nel Khorosan e presso l'Osservatorio astronomico di Sjistan, contribuendo alla diffusione delle conoscenze scientifiche nel Sud dell'Iran e nell'Iraq.

Abū'l-Kāsim Asbagh ibn Muhammad ibn al-Samh al-Gharnātī è un cultore di geometria, nato a Cordova nel 979, vissuto e morto a Granada nel 1035. È un importante membro della scuola di Maslama al-Majrītī

[1] La prima parte del percorso storico-didattico tra i matematici arabi dei secoli IX-XIII si trova in [Maierù-Florio 2018].

di Cordova. A causa di un'agitazione politica si trasferisce a Granada, dove vive fino alla fine della sua vita, mettendosi al servizio del capo locale Habbūs ibn Māksan.

Abū Ali al-Hasan ibn al-Haytham, detto anche al-Basrī, conosciuto negli ambienti latini con il nome di Alhazen, nasce a Basra, in Persia, e muore al Cairo nel 1040. Trasferitosi al Cairo, divenuta la capitale del regno della dinastia dei Fatimidi, che domina molta parte del Mediterraneo fino in Sicilia, collabora con gli intellettuali del tempo al progresso culturale e all'estensione del regno, viaggiando dall'Egitto all'Iraq e alla Siria.

Abū Arrayhan Muhammad ibn Ahmad al-Bīrūnī nasce nel 973 a Kath (oggi Kara-Kalpakskaya, in Uzbekistan) e muore nel 1048 a Ghazna (oggi Ghazni, in Afghanistan). La sua vita si svolge tra Kath e Jurianiyya. È alunno di Abū Masr Mansur, un famoso astronomo e matematico. Impressionante è il numero di scritti che vengono a lui attribuiti.

Abū 'Amir Yūsuf ibn Hūd, detto al-Mu'taman, succede a suo padre regnando, per soli quattro anni (muore nel 1085), a Zaragoza in Spagna.

Ghiyath al-Dīn Abū'l-Fath Umar ibn Ibrahim al-Nisaburī al-Khayyām nasce nel 1048 a Nishapur (antica Persia, oggi Iran) e ivi muore nel 1131. Nella sua città studia filosofia, matematica e astronomia. Scrive molti trattati di vario genere. A lui sono attribuiti anche componimenti poetici. Nel 1070 si reca a Samarkanda, in Uzbekistan, una delle più antiche città colte nell'Asia centrale, dove, supportato da Abū Tahir, un eccellente giurista, scrive il suo *Trattato sulla dimostrazione dei problemi in algebra*. Dopo il 1073 riceve l'invito da parte di Malik-Shah, califfo di Esfahan, di recarsi in quella città per costruirvi un osservatorio astronomico. Al-Khayyām, assieme ad altri astronomi, realizza l'osservatorio, rimanendo nella città a lavorare per diciotto anni alla composizione di opere importanti di astronomia. Nel 1092 muore Malik-Shah, termina il periodo di pace e comincia un periodo di grandi turbolenze, di cui lo stesso Al-Khayyām è vittima, venendo attaccato da Musulmani ortodossi che ritengono i suoi interessi culturali non conformi alla fede.

Sharaf al-Dīn al-Muzaffar ibn Muhammad ibn al-Muzaffar al-Tūsī nasce a Tus, nella regione del Khorasan (attuale Iran) nel 1135 e muore nel 1213. È alunno di Al-Khayyam. Nel 1165 si reca a Damasco (Siria) per studiare matematica alla scuola di Abū'l Fadl. Si trasferisce poi ad Aleppo, per almeno tre anni, dove fa da insegnante a un importante membro della comunità ebraica della città, e, successivamente, si reca a Mosul, nel nord-ovest dell'Iraq, sulla riva del Tigri, dove ha come alunno Kamal al-Dīn ibn Yūnus.

Di Kamāl al-Dīn ibn Yūnus (1156-1242) abbiamo poche notizie. Vive a Mosul, frequentando probabilmente la corte del Saladino. Alunno di Sharaf al-Dīn al-Tūsī, diventa a sua volta uno dei più celebri maestri del mondo islamico. È conosciuto come filologo, teologo, giurista, filosofo e matematico.

Ibn Yahya al-Maghrībī al-Samowal nasce a Bagdad nel 1130 e muore a Maragha nel 1180. Viaggia molto in Iraq, Siria, Pakistan, Afghanistan.

Muhammad ibn Muhammad ibn al-Hasan al-Tūsī, conosciuto come Nasir al-Dīn al-Tūsī, nasce a Tus (regione del Khorosan, Iran) nel 1201 e muore a Kadhimain, vicino a Bagdad, nel 1275.

Kamal al-Dīn Abū'l Hasan Mihammad al-Fārīsī (1260-1320) entra a far parte a Tabriz, probabilmente intorno al 1290 d. C., della cerchia di Qutb al-Din Mahmūd ibn Masūd al-Shirazi, un alunno di Nasir al-Dīn al-Tūsī. Si occupa in particolare della teoria della luce, dei colori, dell'arcobaleno, degli specchi ustori e della teoria dei numeri.

Probabilmente nello stesso periodo storico vivono altri cultori di matematica, tanti dei quali collaborano con quelli sopra citati.

Dopo i secc. IX-XIII un buio scientifico lentamente avvolge tanti popoli di lingua araba, producendo un inesorabile isolamento culturale e la conseguente perdita di quel carattere universale espresso dalla loro cultura in forma eccellente nei cinque secoli considerati.

Riprendiamo il nostro percorso cercando di familiarizzare con alcuni scritti di natura matematica che possono arricchire le nostre conoscenze sulle costruzioni geometriche.

Capitolo I

Al-Sijzī

1.1. Introduzione

Abū Said Ahmad ibn Muhammad ibn Abd al-Jalil al-Sijzī nasce nel 945 a Sjistan, Persia, e muore nel 1020. Poco si conosce della sua vita. Dei suoi scritti alcuni sono dedicati al principe di Balkh (capitale di Khorosan) e uno ad Abud ad-Dāwlāh, che aveva patrocinato le arti e le scienze durante il suo regno nel Sud dell'Iran e nell'Iraq (tra il 949 e il 983).

Negli anni 969-970 collabora alle osservazioni astronomiche fatte in Shiraz, dove scrive la maggior parte delle sue opere matematiche. Nel 969 copia scritti di altri matematici, come il trattato sul quadrilatero completo di Thābīt ibn Qūrrā. Ha una corrispondenza epistolare con Al-Bīrūnī; esiste, infatti, una lettera indirizzata da costui ad Abū Said, cioè ad Al-Sijzī, in cui vi è la dimostrazione del teorema del seno nel caso piano e in quello sferico.

Al-Sijzī si occupa di problemi geometrici usando il metodo del problem solving. Esempi di questi problemi sono i seguenti:

— dato un cerchio, trovare un punto fuori del cerchio tale che per esso sia tracciata la retta tangente e passi il prolungamento del diametro, in modo che tangente e diametro stiano in un rapporto dato;
— dati un triangolo e tre numeri, trovare un punto interno al triangolo da cui partono tre segmenti che passano per i vertici dividendo il triangolo dato in tre triangoli aventi le aree proporzionali ai tre numeri dati.

Lo scritto *Libro della misura di sfere per mezzo di sfere* del 969 ha un notevole interesse per i problemi che presenta e per i teoremi che elabora. In esso Al-Sijzī studia la posizione reciproca di sfere contenute in una sfera più grande, considerando la posizione di mutua tangenza tra esse e confrontando i rispettivi volumi.

Il *Trattato in cui si immaginano due rette che si avvicinano sempre di più senza intersecarsi quando sono prolungate all'infinito, che l'eccellente Apollonio dimostra nel secondo libro delle coniche* contiene la classificazione di diversi tipi di problemi geometrici, oltre lo studio del rapporto tra un'iperbole e un suo asintoto.

Al-Sijzī si occupa dei luoghi di superfici di cupole iperboliche e paraboliche, delle coniche costruite per punti e della loro costruzione continua, del compasso perfetto, dello studio generale dell'iperbole e della sua costruzione per punti, del ruolo del cerchio nello studio e nella costruzione delle figure geometriche, della costruzione geometrica dei problemi solidi, della trisezione dell'angolo e della costruzione dell'eptagono regolare[2].

Queste problematiche sono espresse nei seguenti scritti[3], che danno un quadro completo degli interessi geometrici di Al-Sijzī, sui quali fermiamo la nostra attenzione:

— *Sulle proprietà della cupola iperbolica e della cupola parabolica*;
— *Sulle proprietà dei solidi ellittici, iperbolici e parabolici*;
— *Sulla descrizione delle sezioni coniche*;
— *Sulla costruzione del compasso perfetto, che è il compasso del cono*;
— *Come concepire due linee che si avvicinano e non si incontrano, se vengono prolungate all'infinito*;
— *Ogni figura si ottiene a partire dal cerchio*;
— *Sulla divisione di un angolo rettilineo in tre parti uguali*;
— *La determinazione di due medie proporzionali e la divisione geometrica dell'angolo rettilineo in tre parti uguali*;

---

[2] R. Rashed si è occupato degli scritti di Al-Sijzī in [Rashed 2005]. Nel 2004 ha edito un volume dedicato a queste problematiche, presentate e discusse in [Rashed 2004, pp. 9-187]. Su aspetti particolari dell'opera matematica di Al-Sijzī vedi [Crozet 2010] e [Rashed 2003].
[3] Questi scritti in lingua araba e nella traduzione in francese sono in [Rashed 2004, pp. 189-419]. Questo volume è recensito in [Maierù 2007].

— *Sulla costruzione dell'eptagono regolare e la trisezione dell'angolo.*

Contemporaneo di Al-Sijzī è Abū Bekr ibn Muhammad ibn al-Hūsayn al-Karajī, nato nel 953 a Bagdad e morto nel 1029.

Il suo contributo allo sviluppo della matematica consiste soprattutto nel fatto di aver giustificato, all'interno dell'algebra, le operazioni aritmetiche, in particolare quelle delle potenze di grado diverso, fornendo numerosi e significativi esempi numerici, proponendo problemi la cui soluzione è cercata secondo lo stile di Diofanto[4].

Riprendiamo il nostro discorso passando in rassegna gli scritti scelti di Al-Sijzī e partendo dalla convinzione, consolidata dalla loro lettura, della centralità delle coniche nella sua elaborazione matematica.

1.2. La costruzione di cupole iperboliche e paraboliche. Alcune proprietà di solidi ellittici, iperbolici e parabolici

Il periodo di formazione matematica di Al-Sijzī è abbastanza lontano dal periodo in cui i matematici erano impegnati, prima di tutto, nelle traduzioni di scritti di matematici greci. Tali traduzioni erano il mezzo di trasmissione delle conoscenze matematiche più antiche alle generazioni successive.

In questo contesto vanno letti i due scritti di Al-Sijzī che possono essere ritenuti complementari[5]: *Sulle proprietà della cupola iperbolica e della cupola parabolica* e *Sulle proprietà dei solidi ellittici, iperbolici e parabolici*.

Al-Sijzī compone il trattato *Sulle proprietà della figura ovale della figura lenticolare*, a noi non pervenuto, prima dello scritto *Sulle proprietà della cupola iperbolica e della cupola parabolica* che, nell'intenzione dell'autore, era il completamento del primo.

---

[4] L'apporto di Al-Karajī allo sviluppo dell'algebra è presentato in numerosi lavori di R. Rashed, tra cui [Rashed 1984, pp. 31-42], e in [Galuzzi-Maierù-Santoro 2010, pp. 61-67].

[5] Il trattato sulle cupole si trova in [Rashed 2004, pp. 190-209] mentre il trattato sui solidi ottenuti tramite rotazioni di coniche è in [Rashed 2004, pp. 212-227].

Il primo trattato presentava le proprietà delle figure solide ottenute dalla rotazione di un'ellisse attorno al suo asse maggiore (figura ovale) e al suo asse minore (figura lenticolare). Lo stesso autore apre il secondo trattato parlando di questo per, poi, mettere in evidenza di volere presentare le proprietà dei solidi ottenuti dalla rotazione di un'iperbole e di una parabola ("cupola iperbolica" e "cupola parabolica"). Prima di tutto e in forma sintetica fornisce un quadro d'insieme sull'esistenza di una o più coniche (cerchio, parabola, iperbole, ellisse) sulla superficie di un solido di rotazione.

Il suo percorso di ricerca consiste nel cercare proprietà di sezioni coniche sulla superficie di solidi generati dal movimento di un triangolo rettangolo (cono retto) e di un rettangolo (cilindro retto). Successivamente il problema viene, in un certo senso, invertito: cercare sezioni sulla superficie di solidi generati dalla rotazione di coniche.

Al-Sijzī arriva ai seguenti risultati:

- sulla superficie di una sfera non vi sono altro che cerchi;
- sulla superficie di ogni solido di rotazione vi sono cerchi;
- sulla superficie di una figura ovale e di una figura lenticolare, oltre a cerchi, vi sono ellissi, essendo queste figure generate dalla rotazione di un'ellisse attorno a uno dei suoi assi;
- sulla superficie di solidi generati dalla rotazione di una parabola attorno al suo asse (paraboloidi) vi sono cerchi, parabole ed ellissi (queste ellissi – afferma l'autore – devono esserci, essendo le curve "più vicine" ai cerchi);
- sulla superficie di solidi generati dalla rotazione di un'iperbole attorno al suo asse (iperboloide) vi sono iperboli, cerchi ed ellissi.

Per indicare l'esistenza di una o più coniche sulla superficie di un solido di rotazione di una conica, Al-Sijzī introduce il termine "rango", legando alle espressioni "primo rango", "secondo rango", "terzo rango", ecc., il numero di coniche esistenti su quella superficie:

- la sfera è di primo rango, avendo sulla superficie solo cerchi, limitati dal cerchio massimo, che è il cerchio più grande della sfera;

— la figura ovale e la figura lenticolare sono di secondo rango, avendo sulla superficie cerchi ed ellissi, limitati rispettivamente dal cerchio massimo e dall'ellisse massima;
— il solido cilindrico è di terzo rango, avendo sulla sua superficie cerchi, ellissi limitate ed ellissi illimitate;
— la cupola parabolica e la cupola iperbolica sono di quarto rango, avendo sulla loro superficie rispettivamente cerchi, ellissi, parabole oppure cerchi, ellissi, iperboli (non ci sono parabole sulla cupola iperbolica né iperboli sulla cupola parabolica);
— il solido conico è di quinto rango, poiché sulla sua superficie vi sono cerchi illimitati su entrambe le parti, in grandezza e in piccolezza, ellissi, iperboli e parabole illimitate e triangoli.

L'idea di "rango" qui introdotta deriva in modo naturale e universale dallo studio dell'esistenza di "sezioni" sulla superficie di un cono e di un cilindro e dal loro numero.

Apollonio aveva fornito il quadro completo per le sezioni sulla superficie di un cono, lasciando ai posteri il compito di completare il discorso studiando le sezioni sulla superficie di un cilindro.

Tutto questo fa presupporre che Al-Sijzī fosse documentato sullo sviluppo storico di queste idee.

Cerchiamo di mettere in evidenza qualche elemento riguardante questa classificazione secondo il rango.

Il piccolo trattato è composto dalle due seguenti proposizioni:

— Data la parabola CAD, se essa viene fatta ruotare attorno al suo asse AB, si ottiene la cupola parabolica CAD. Allora la sezione ottenuta con un piano secante è una parabola uguale alla parabola CAD oppure un'ellisse oppure un cerchio.
— Data l'iperbole CAD, se essa viene fatta ruotare attorno al suo asse AB, si ottiene la cupola iperbolica CAD. Allora la sezione ottenuta con un piano secante è un'iperbole oppure un'ellisse oppure un cerchio.

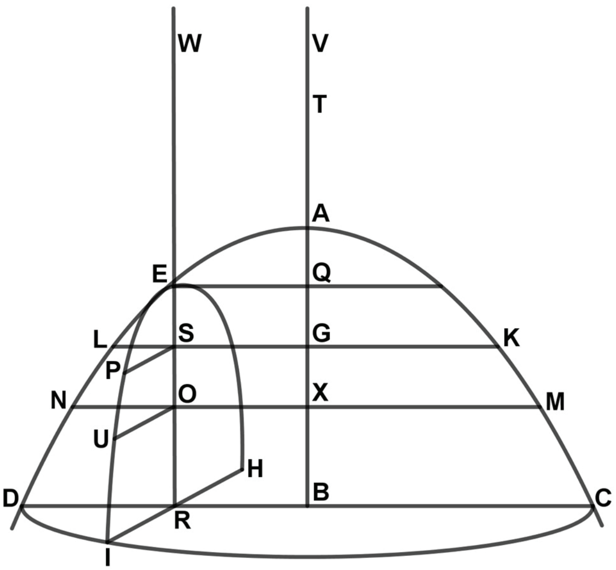
Queste proposizioni sono dimostrate in modo lineare e completo e sono strutturate parallelamente, facendo vedere che ciò che si ottiene è una conseguenza logica e un approfondimento di qualche proposizione degli *Elementi conici*, a partire dalle propp. I 11 e 12, nelle quali Apollonio specifica il carattere della parabola e dell'iperbole.

Vediamo come è articolato il discorso nella dimostrazione della seconda proposizione:

> Data l'iperbole CAD, se essa viene fatta ruotare attorno al suo asse AB, si ottiene la cupola iperbolica CAD. Allora la sezione ottenuta con un piano secante è un'iperbole oppure un'ellisse oppure un cerchio[6].

Consideriamo separatamente i diversi casi.

Primo caso. Il piano HEI sia parallelo all'asse AB e perpendicolare al piano della sezione iperbolica CAD, in modo che la loro intersezione sia ER parallela a AB. Allora la sezione HEI è un'iperbole.



Essendo dato il diametro TA dell'iperbole CAD e della cupola iperbolica, tracciamo EQ, LK, NM, DC, che sono ordinate per l'iperbole CAD e intersecano il diametro rispettivamente in Q, G, X, B.

Tracciamo WE parallelo a TA e infine PS, UO e IR perpendicolari rispettivamente a LK, NM e DC.

[6] [Rashed 2004, pp. 200-2008].

Per la prop. I 21[7] degli *Elementi conici*, $\frac{EQ^2}{LG^2} = \frac{TQ\cdot AQ}{TG\cdot AG}$.
Per lo stesso motivo, $\frac{EQ^2}{NX^2} = \frac{TQ\cdot AQ}{TX\cdot AX}$ e $\frac{NX^2}{LG^2} = \frac{TX\cdot AX}{TG\cdot AG}$.
Servendoci delle relazioni precedenti possiamo considerare

$$\frac{NX^2-EQ^2}{NX^2} = \frac{TX\cdot AX-TQ\cdot AQ}{TX\cdot AX} \qquad \frac{LG^2-E\quad{}^2}{LG^2} = \frac{TG\cdot AG-\qquad\cdot AQ}{TG\cdot AG}$$

$$\frac{NX^2-EQ^2}{LG^2-EQ^2} = \frac{TX\cdot AX-TQ\cdot AQ}{TG\cdot AG-TQ\cdot AQ} \qquad (1)$$

Poiché $EQ = SG = OX = RB$, allora

$$NX^2 - EQ^2 = NX^2 - OX^2 = MO\cdot ON = UO^2$$

$$LG^2 - EQ^2 = LG^2 - SG^2 = KS\cdot SL = PS^2$$

Ponendo $TV = AQ$ otteniamo:

$$TX\cdot AX - TQ\cdot AQ = TX(AQ + QX) - (TX - QX)AQ =$$

$$= TX\cdot AQ + TX\cdot QX - TX\cdot AQ + QX\cdot AQ =$$

$$= QX(TX + AQ) = QX\cdot VX$$

e

$$TG\cdot AG - TQ\cdot AQ = TG(AQ + QG) - (TG - QG)AQ =$$

$$= TG\cdot AQ + TG\cdot QG - TG\cdot AQ + QG\cdot AQ =$$

$$= QG(TG + AQ) = QG\cdot VG$$

Allora, la (1) diventa

$$\frac{UO^2}{PS^2} = \frac{QX\cdot VX}{QG\cdot VG} \qquad (2)$$

---

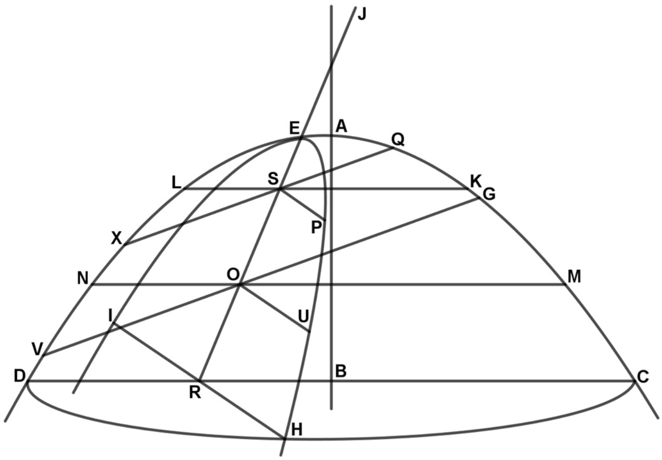
[7] La prop. I 21 si trova in [Apollonio 1923, pp. 43-44], [Apollonio 1974, vol. I, pp. 72-75], [Apollonio 2008, tome 1.1, pp. 336-341] e [Apollonio 2008, tome 1.2, pp. 80-83].

Ponendo $EW = QV$ abbiamo $VG = WS$ e $VX = WO$, per cui la (2) diventa

$$\frac{UO^2}{PS^2} = \frac{EO \cdot WO}{ES \cdot WS}$$

Allora la sezione HEI è l'iperbole di diametro trasverso EW ed è tale che $EW - TA = QA + TV = 2QA$.

Secondo caso. Il piano secante HEI non sia parallelo all'asse AB, ma passi per il centro T e sia perpendicolare al piano CAD. Esso, inoltre, intersechi il piano CAD lungo il diametro TER. Allora la sezione HEI è un'iperbole di asse ER.



Tracciamo le ordinate XQ e VG relative al diametro ER e, inoltre, SP, OU e RH rispettivamente perpendicolari ai diametri LK, NM e DC di cerchi.

Poiché $\frac{SQ \cdot SX}{OG \cdot OV} = \frac{SK \cdot SL}{OM \cdot ON}$ per la prop. III 17[8] degli *Elementi conici,* $SK \cdot SL = PS^2$ e $OM \cdot ON = UO^2$, allora $\frac{SX^2}{OV^2} = \frac{PS^2}{UO^2}$, essendo $SQ \cdot SX = SX^2$ e $OG \cdot OV = OV^2$ poiché ER è un diametro.

[8] "*Prop. III 17.* Se due rette tangenti a una sezione conica oppure alla circonferenza di un cerchio si intersecano, se prendiamo nella sezione due punti qualunque e da questi punti all'interno della sezione tracciamo delle parallele alle rette tangenti, che si intersecano tra loro e intersecano la sezione, allora il prodotto dei segmenti che sono presi nello stesso modo stanno tra loro