



Roberto Caimmi – Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università degli Studi di Padova, Vicolo Osservatorio 3/2, 35122 Padova. In servizio fino al 30/9/14. In congedo per limiti d'età dal 1/10/14 con la qualifica di Studioso Senior. E-mail: roberto.caimmi@unipd.it.

Giovanni Carraro – Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università degli Studi di Padova, Vicolo Osservatorio 3/2, 35122 Padova. E-mail: giovanni.carraro@unipd.it

**ROBERTO CAIMMI
GIOVANNI CARRARO**

LA BURETTA CON CAPILLARE ORIZZONTALE

**VERIFICA EMPIRICA DELLA LEGGE DI DEFLUSSO
PER UN FLUIDO VISCOSO INCOMPRESSIBILE**



aracne



©

ISBN
979-12-218-0435-5

PRIMA EDIZIONE
ROMA 20 GENNAIO 2023

INDICE

7	<i>Introduzione</i>
9	<i>Scopo dell'esperienza</i>
11	1. Fluidi incompressibili in regime laminare
17	2. Fluidi incompressibili in regime laminare lungo un condotto cilindrico orizzontale
25	3. Buretta con capillare orizzontale: deflusso di un fluido viscoso incompressibile
29	4. Verifica grafica sul piano semilogaritmico
35	5. Determinazione del coefficiente di viscosità dinamica e del raggio del capillare
47	6. Operazioni di misura
49	7. Calcolo degli errori
53	<i>Conclusione</i>

6	<i>Indice</i>
55	<i>Ringraziamenti</i>
57	<i>Bibliografia</i>
59	<i>Appendice</i>
67	<i>Galleria fotografica</i>

INTRODUZIONE

L'utilizzo della buretta⁽¹⁾ con deflusso attraverso un capillare orizzontale, per la verifica empirica della dipendenza dal tempo del livello di un fluido viscoso incompressibile, presso i laboratori delle Università e di altro genere, è di così lunga data da rendere superfluo qualsiasi ulteriore cenno al riguardo. Viceversa, alcuni aspetti teorici riguardanti la dinamica dei fluidi e il calcolo degli errori hanno ricevuto scarsa considerazione a causa di una maggiore complessità del problema. Tali argomenti, tuttavia, ci sembrano inevitabili ai fini di una trattazione globale, e costituiscono lo scopo della presente ricerca.

Le motivazioni esposte impongono di ridurre al minimo indispensabile le considerazioni già ampiamente sfruttate per la verifica della legge di deflusso ad opera di un fluido viscoso incompressibile, e al contrario di dare ampio risalto a tutto quanto, molto meno dibattuto, concerne i limiti di validità dei risultati teorici e le relative incertezze.

Gli argomenti dei prossimi paragrafi saranno, nell'ordine: scopo dell'esperienza; moto di un fluido in regime laminare attraverso un condotto cilindrico orizzontale; legge di Poiseuille; velocità critica; legge

(1) Si definisce buretta un tubo cilindrico verticale in materiale trasparente, provvisto di una scala volumetrica, con un'apertura all'estremità superiore per consentire il versamento di un liquido e un rubinetto all'estremità inferiore per consentire lo scarico quando richiesto. Per scale con errore di sensibilità sufficientemente basso, la lettura è facilitata dalla presenza di una striscia longitudinale blu su sfondo bianco, posizionata sul lato opposto, che si denomina *banda di Schellbach*.

di deflusso da una buretta attraverso un capillare orizzontale; apparato sperimentale; verifica della legge di deflusso; soluzione del problema della misura per il coefficiente di viscosità dinamica; soluzione del problema della misura per il raggio del capillare; verifica empirica dello stato di moto laminare. Finalmente, la conclusione compendia i risultati di maggior rilievo. I valori della densità e del coefficiente di viscosità dinamica dell'acqua distillata per un intervallo di temperature riscontrabili in laboratorio, necessari per l'elaborazione dei dati, sono tabulati in Appendice A, dove si determina un limite superiore per l'errore dovuto all'incertezza sulla temperatura ambiente, riscontrata utilizzando un termometro di caratteristiche note. Una galleria fotografica che ritrae gli aspetti essenziali della strumentazione è presentata in Appendice B.

La ricerca corrente costituisce una versione migliorata di una precedente pubblicazione sull'argomento, citata nella bibliografia. Le modifiche apportate oltre ad analizzare nel dettaglio gli aspetti sopra menzionati, chiarificano l'esposizione e perfezionano alcuni calcoli, oltre a correggere gli inevitabili errori di stampa.

SCOPO DELL'ESPERIENZA

L'esperienza è finalizzata alla verifica della legge di deflusso di un fluido viscoso incompressibile, contenuto in una buretta, attraverso un capillare orizzontale. Si può inoltre dedurre dai dati il coefficiente di viscosità dinamica e confrontarlo con la sua controparte alla stessa temperatura ambiente, riportata su apposite tabelle, e verificare che il deflusso del fluido all'interno del capillare avviene effettivamente in regime laminare. Infine riferendosi al valore tabulato del coefficiente di viscosità dinamica, si può dedurre dai dati il raggio del capillare e confrontarlo con il valore fornito dal costruttore. Al riguardo, si procede attraverso i passaggi seguenti.

1. Moto in regime laminare di una corona cilindrica di spessore infinitesimo (elemento fluido) coassiale a un condotto pure cilindrico e orizzontale.
2. Campo di velocità nella sezione circolare di un condotto cilindrico orizzontale.
3. Portata di un condotto cilindrico orizzontale (legge di Poiseuille).
4. Numero di Reynolds e condizione di validità per il regime laminare.
5. Deflusso di un fluido viscoso incompressibile in una buretta attraverso un capillare orizzontale.
6. Soluzione del problema della misura per il coefficiente di viscosità dinamica del fluido.

7. Soluzione del problema della misura per il raggio del capillare.
8. Verifica del regime laminare nel fluido all'interno del capillare.

I punti menzionati saranno trattati nei paragrafi successivi.

1. FLUIDI INCOMPRESSIBILI IN REGIME LAMINARE

Si consideri un fluido incompressibile caratterizzato da un campo di velocità indipendente dal tempo, vale a dire in *condizioni di regime*, relativamente ad una superficie di scorrimento arbitraria ma prefissata. Nel caso ideale, ci si aspetta che la velocità del generico elemento fluido non vari lungo una generica superficie isobara, $v_{iso}(r) = \text{cost}$, e quindi la velocità relativa fra due elementi qualsiasi giacenti su una generica superficie isobara sia nulla. In realtà, per valori del gradiente di velocità sufficientemente piccoli in valore assoluto, vale a dire in *regime laminare*, si osserva un andamento monotono crescente del campo di velocità mano a mano che ci si allontana dalla superficie di scorrimento, come schematizzato in Fig. 1.

Un tale comportamento è dovuto alla presenza di forze di attrito interno nel fluido, che si oppongono allo slittamento di elementi contigui: l'elemento a contatto con la superficie di scorrimento viene rallentato da questa, e a sua volta rallenta l'elemento contiguo, e così via, fino a raggiungere quell'ultimo elemento caratterizzato dal più alto valore della velocità, vale a dire l'elemento più lontano dalla superficie di scorrimento.

Allo scopo di determinare, nelle condizioni considerate, l'espressione esplicita del campo di velocità, $v(r)$, definiamo la forza di attrito interno per unità di superficie:

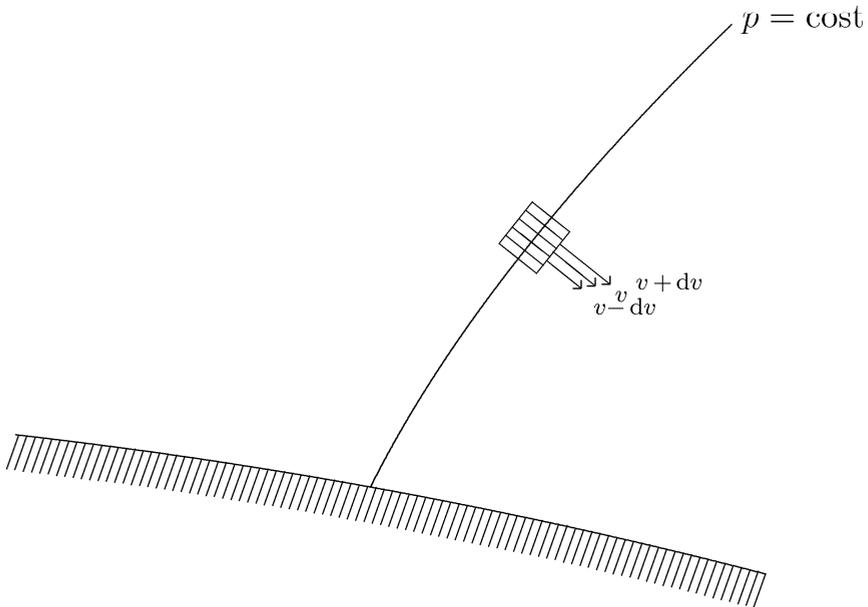


Figura 1. Moto di un fluido viscoso incompressibile in regime laminare, nei pressi di una superficie di scorrimento. Il gradiente di velocità è stato esagerato al fine di una migliore visualizzazione.

$$f = \frac{F_A}{S} ; \quad (1)$$

dove F_A rappresenta la risultante delle forze di attrito interno che si oppongono allo slittamento di due elementi contigui lungo la superficie comune, S , tangente alla direzione del moto. Per economia di notazione, nel seguito ci si riferirà alla la forza di attrito interno per unità di superficie come alla *pressione trasversa* cui è soggetto l'elemento fluido: pressione, in quanto f ne ha le dimensioni; trasversa, in quanto la forza di attrito interno agisce parallelamente alla superficie dove si esercita, anziché in direzione normale.

Circa la dipendenza della pressione trasversa dal gradiente di velocità:

$$\phi = \frac{dv}{dr} ; \quad (2)$$

osserviamo che $f \leq 0$ in quanto dipendente da una forza di attrito e $\phi \leq 0$ in base alle considerazioni fatte, purché si fissi l'origine della coordinata, r , in corrispondenza al punto più lontano dalla superficie di scorrimento, e il verso positivo in direzione della superficie di scorrimento. Ne segue che f diminuisce al diminuire di ϕ , donde $df/d\phi > 0$; inoltre $\phi = 0$ comporta $v(r) = \text{cost}$, dove la costante può assumere qualsiasi valore per un fluido ideale mentre può soltanto annullarsi per un fluido reale, e comunque $f = 0$.

In tutta generalità, f dipende da ϕ e dalle sue infinite derivate rispetto a r :

$$f = f \left(\phi, \frac{d\phi}{dr}, \dots, \frac{d^n \phi}{dr^n}, \dots \right) ; \quad (3)$$

tuttavia per valori del gradiente di velocità sufficientemente piccoli (in modulo) è una buona approssimazione trascurare il momento torcente che agisce su un dato elemento fluido a causa dell'azione accelerante dovuta all'elemento contiguo più lontano dalla superficie di scorrimento, e dell'azione frenante dovuta all'elemento contiguo più vicino alla superficie di scorrimento.

La relazione precedente, in base alle considerazioni svolte, a meno di termini di ordine superiore si riduce a:

$$f = f(\phi) ; \quad f(0) = 0 ; \quad (4)$$

e sviluppando in serie di MacLaurin si ottiene:

$$f(\phi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n f}{d\phi^n} \right)_0 \phi^n ; \quad (5)$$

dove le derivate devono necessariamente essere limitate se si vuole considerare un fluido in movimento in condizioni di regime: in caso contrario la pressione trasversa tenderebbe a divergere e lo slittamento tra elementi fluidi contigui non potrebbe aver luogo.

Ne segue che per valori del gradiente di velocità sufficientemente piccoli (in modulo) è una buona approssimazione trascurare tutti i termini della serie successivi al primo, per cui la (4) si riduce a:

$$f = \eta\phi \quad ; \quad \eta = \left(\frac{df}{d\phi} \right)_0 \quad ; \quad (6)$$

dove il parametro, η , necessariamente positivo in base alle considerazioni svolte, si denomina *coefficiente di viscosità dinamica*. Si trova che per i liquidi η diminuisce al crescere della temperatura e per i gas η non dipende dalla pressione a temperatura costante. Il rapporto:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad ; \quad (7)$$

essendo ρ la densità del fluido in esame, si denomina *coefficiente di viscosità cinematica*. Per i fluidi incompressibili, $\rho = \text{cost}$ e pertanto è sufficiente riferirsi ad un solo coefficiente di viscosità, a differenza dei fluidi compressibili.

Indicando con $(p_1 - p_2)$ la differenza di pressione che corrisponde alle condizioni di regime nel fluido, è possibile esprimere il rapporto tra la pressione trasversa dovuta alla forza passiva e la pressione ordinaria dovuta alla forza motrice:

$$\kappa = \frac{-\eta\phi}{p_1 - p_2} \quad ; \quad (8)$$

dove $\kappa > 0$ essendo $\phi < 0$ come visto a suo tempo. Il valore di κ deve essere tale da comportare:

1. valori di η sufficientemente bassi da permettere lo scorrimento del fluido;
2. valori di ϕ sufficientemente bassi da preservare il regime laminare;
3. valori di $(p_1 - p_2)$ compatibili con i valori di ϕ di cui al punto precedente (dalle considerazioni svolte a suo tempo si evince con facilità come all'aumentare della differenza di pressione aumenti il gradiente di velocità).

Una condizione sufficiente per lo scorrimento del fluido è data da:

$$\kappa = \frac{-\eta\phi}{p_1 - p_2} \ll 1 ; \quad (9)$$

vale a dire, la pressione trasversa deve essere trascurabile rispetto alla pressione ordinaria.

I risultati trovati forniscono l'espressione esplicita della forza di attrito interno che si esercita tra due elementi fluidi contigui lungo la superficie comune, S , tangente alla direzione del moto, nella forma:

$$F_A = \eta\phi S = \eta S \frac{dv}{dr} . \quad (10)$$

2. FLUIDI INCOMPRESSIBILI IN REGIME LAMINARE LUNGO UN CONDOTTO CILINDRICO ORIZZONTALE

Particolarizzando le considerazioni precedenti al caso in cui la superficie di scorrimento sia data da un condotto cilindrico orizzontale, conviene considerare gli elementi fluidi costituiti da corone cilindriche di spessore infinitesimo, coassiali al condotto. Il campo di velocità su una sezione circolare del condotto risulta dal fatto che il generico elemento fluido, ad opera delle forze di attrito interno, è spinto dall'elemento contiguo a contatto della superficie laterale interna ed è rallentato dall'elemento contiguo a contatto della superficie laterale esterna. In particolare, il filetto fluido sull'asse del condotto presenta la velocità massima e l'elemento fluido a contatto con la parete del condotto presenta la velocità minima, da ritenersi infinitesima.

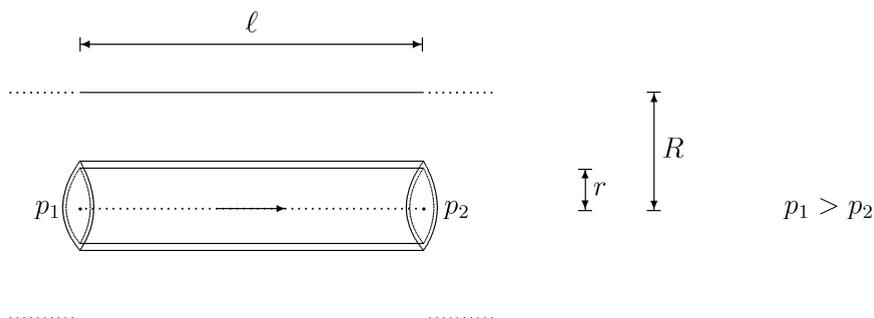


Figura 2. Moto di un fluido viscoso incompressibile in regime laminare lungo un condotto cilindrico orizzontale.

Sul generico elemento fluido del tipo considerato, rappresentato in Fig. 2, agiscono quattro forze e precisamente due forze infinitesime sulle basi, dovute alla pressione ordinaria:

$$dF_1 = p_1 2\pi r dr \quad ; \quad dF_2 = -p_2 2\pi r dr \quad ; \quad (11)$$

(dove si è supposto che il moto avvenga dalla base soggetta alla pressione, p_1 , alla base soggetta alla pressione, p_2 , ossia $p_1 > p_2$) e due forze finite sulle superfici laterali, dovute alla pressione trasversa:

$$F_3 = \eta(\phi + d\phi)2\pi(r + dr)\ell \quad ; \quad F_4 = -\eta\phi 2\pi r \ell \quad ; \quad (12)$$

(dove, conformemente alla (10), si è tenuto presente che le forze di attrito interno sono negative e ogni elemento fluido, a prescindere dal filetto centrale, è accelerato dal contiguo ad esso interno e decelerato dal contiguo ad esso esterno, in particolare dalla parete del condotto), essendo ℓ la lunghezza dell'elemento in questione, ossia l'altezza della corona cilindrica.

Trovandosi il fluido in condizioni di regime, ossia essendo il campo di velocità indipendente dal tempo, la forza risultante agente su ogni elemento fluido deve essere nulla; risulta pertanto:

$$\begin{aligned} p_1 2\pi r dr - p_2 2\pi r dr + 2\pi\eta\ell(\phi + d\phi)(r + dr) - 2\pi\eta\ell\phi r &= 0 \quad ; \\ (p_1 - p_2)r dr + \eta\ell(r d\phi + \phi dr + d\phi dr - r\phi) &= 0 \quad ; \end{aligned}$$

dove, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo, si ottiene:

$$\begin{aligned} (p_1 - p_2)r dr + \eta\ell(r d\phi + \phi dr) &= 0 \quad ; \\ \frac{p_1 - p_2}{\eta\ell}r dr + r d\phi + \phi dr &= 0 \quad ; \end{aligned}$$

la cui validità, a r fissato, si preserva indipendentemente dall'altezza dell'elemento fluido in esame, donde $(p_1 - p_2) / \ell = \text{cost.}$ In definitiva, si ha:

$$\frac{d\phi}{dr} + \frac{\phi}{r} + A = 0 ; \quad A = \frac{p_1 - p_2}{\eta \ell} = \frac{p_i - p_f}{\eta L} ; \quad (13)$$

avendo indicato con p_i, p_f , la pressione all'inizio e alla fine del condotto, e con L la sua lunghezza.

Al fine di risolvere l'equazione differenziale, si effettua il cambiamento di variabile:

$$\psi = \frac{\phi}{r} ; \quad \phi = \psi r ; \quad \frac{d\phi}{dr} = r \frac{d\psi}{dr} + \psi ; \quad (14)$$

e la (13) si traduce nella:

$$r \frac{d\psi}{dr} + \psi + \psi + A = 0 ; \quad \frac{d\psi}{dr} + \frac{2\psi + A}{r} = 0 ; \quad \frac{d\psi}{2\psi + A} = -\frac{dr}{r} ;$$

$$\frac{1}{2} \frac{d(2\psi + A)}{2\psi + A} = -\frac{dr}{r} ; \quad \frac{d(2\psi + A)}{2\psi + A} = -2 \frac{dr}{r} ;$$

dove i rapporti sono numeri puri.

Integrando membro a membro, si ottiene:

$$\log(2\psi + A) - \log(2\psi_0 + A) = \log r^{-2} - \log r_0^{-2} ;$$

$$\log \frac{2\psi + A}{2\psi_0 + A} = \log \frac{r_0^2}{r^2} ; \quad \frac{2\psi + A}{2\psi_0 + A} = \frac{r_0^2}{r^2} ;$$

$$\psi = -\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(2\psi_0 + A) \frac{r_0^2}{r^2} ;$$

e passando dalla nuova alla vecchia variabile, si ha:

$$\frac{\phi}{r} = -\frac{1}{2}A + \frac{1}{2} \left(2\frac{\phi_0}{r_0} + A \right) \frac{r_0^2}{r^2} ; \quad \phi = \left(\phi_0 + \frac{1}{2}Ar_0 \right) \frac{r_0}{r} - \frac{1}{2}Ar ;$$

infine esplicitando ϕ , conformemente alla (2), risulta:

$$\frac{dv}{dr} = \left[\left(\frac{dv}{dr} \right)_{r_0} + \frac{1}{2}Ar_0 \right] \frac{r_0}{r} - \frac{1}{2}Ar .$$

Separando le variabili e integrando, si ottiene:

$$v - v_0 = \left[\left(\frac{dv}{dr} \right)_{r_0} + \frac{1}{2} Ar_0 \right] r_0 (\log r - \log r_0) - \frac{1}{4} A(r^2 - r_0^2) ;$$

$$v(r) = v_0 + \left[\left(\frac{dv}{dr} \right)_{r_0} + \frac{1}{2} Ar_0 \right] r_0 \log \frac{r}{r_0} - \frac{1}{4} A(r^2 - r_0^2) ;$$

dove $v_0 = v(r_0)$. Per rimuovere l'indeterminazione su $v(r)$ integrando a partire dall'asse del condotto ($r_0 = 0$), si calcola il limite:

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r_0 \log \frac{r}{r_0} = r \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{r_0}{r} \log \frac{r}{r_0} = r \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = r \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 ;$$

essendosi posto $r/r_0 = x$.

D'altra parte, un valore infinito del gradiente di velocità, dv/dr , comporterebbe che elementi fluidi contigui presentano una differenza di velocità finita, la qual cosa avviene nei fluidi ideali ma non nel caso in esame di fluidi viscosi. In effetti, si osserva sperimentalmente che nel regime laminare la velocità è massima in corrispondenza all'asse del condotto, dove il gradiente di velocità necessariamente si annulla, $(dv/dr)_{r_0=0} = 0$.

In base alle considerazioni esposte, l'espressione della velocità si riduce a:

$$v(r) = v_0 - \frac{1}{4} Ar^2 ;$$

dove v_0 si determina imponendo la condizione al contorno che la velocità si annulla sulla superficie del condotto:

$$0 = v(R) = v_0 - \frac{1}{4} AR^2 ; \quad v_0 = \frac{1}{4} AR^2 ;$$

essendo R il raggio del condotto. Sostituendo nell'espressione di $v(r)$ e utilizzando la (13), in definitiva si trae: