MATEMATICHE COMPLEMENTARI

FONDAMENTI, STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA

18

MATEMATICHE COMPLEMENTARI

FONDAMENTI, STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA

La matematica altri non è che il lato esatto del nostro pensiero.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer

La collana è dedicata a studi e ricerche sui Fondamenti, sulla Storia e sulla Didattica della Matematica, dando rilievo agli aspetti culturali di questa disciplina, cogliendone le variegate espressioni e approfondendo la sua incidenza nella formazione umana e disciplinare. La collana, perciò, accoglie:

— studi sui Fondamenti della Matematica e la loro storia;
— ricerche di Storia della Matematica (sviluppo storico di idee e metodi, corrispondenze tra matematici, edizioni critiche di manoscritti, ecc...);
— proposte di percorsi dai contenuti storici a una loro riproposizione didattica;
— scritti di divulgazione dei contenuti matematici e della loro incidenza nello sviluppo di altre scienze;
— riflessioni sugli aspetti generali della Didattica della Matematica (dall'antropologia alle scienze psico-pedagogiche e alle neuroscienze);
— proposte di Didattica della Matematica relative a modalità differenti di attività didattiche in una classe di alunni;
— proposte di Didattica della Matematica con l'uso costante di nuove tecnologie.

Per l'eventuale inserimento in collana, ogni opera viene sottoposta alla valutazione del Comitato Scientifico e di esperti del settore, qualora necessario.

EMILIA FLORIO
LUIGI MAIERÙ

BELLEZZA ED ESTETICA NELLA STORIA DEL PROBLEMA DEL QUADRATO

aracne

aracne

ISBN
979–12–218–0305–1

PRIMA EDIZIONE
ROMA 20 DICEMBRE 2022

Indice

Introduzione

Nel corso della nostra ricerca sulle costruzioni geometriche, prendendo atto del ruolo che esse hanno nella soluzione di problemi e nella dimostrazione di teoremi geometrici, più volte ci siamo imbattuti nella *retta di Archimede* e nel *problema del quadrato*, che svolgono il ruolo di *lemmi* all'interno dell'articolazione della soluzione di alcuni specifici problemi.

Durante i corsi curricolari che segnano la formazione matematica a qualunque livello è difficile imbattersi nella *retta di Archimede* e nel *problema del quadrato*. D'altra parte si può osservare che, oltre a considerare lo sviluppo delle idee portanti della matematica, vi sono alcuni problemi la cui storia meriterebbe di essere tenuta presente nella trasmissione della cultura matematica. Sarebbe opportuno sapere di più, ad esempio, sulla costruzione dei poliedri regolari, sulla costruzione della doppia media proporzionale, sullo studio della sfera, sulla ricerca delle soluzioni di problemi classici dell'antichità (duplicazione di un cubo, trisezione di un angolo, quadratura di un cerchio) o di epoca più recente (rettificazione e quadratura di una curva, calcolo della retta tangente in un punto a una curva), anche in ragione della constatazione che attorno ad alcuni di questi problemi la riflessione di cultori di matematica e di filosofia è attenta e varia.

Per quanto riguarda la sfera, ad esempio, i matematici ne specificano le proprietà geometriche e risolvono alcuni problemi, come si legge ne *La sfera e il cilindro* di Archimede, nella *Sferica* di Teodosio Tripolita, nelle *Sferiche* di Menelao di Alessandria e nel *Trattato matematico*, chiamato *Almagesto* dai matematici arabi, di Claudio Tolomeo, il quale ne fa vedere alcune applicazioni nella ricerca di soluzioni di problemi astronomici. Per diversi secoli i filosofi, almeno da Plotino a Emmanuel Kant, riprendono e presuppongono molte conoscenze geometriche attorno alla sfera, come è evidente dal vocabolario essenziale da loro utilizzato. Alcuni compiono un ulteriore percorso di riflessione su questa figura geometrica attraverso un linguaggio metaforico e analogico, così esemplificato dal Maestro Eckhart: *Dio è una sfera intellettuale infinita,* *il cui centro è ovunque con la circonferenza e di cui tante sono le circonferenze quanti sono i punti*. Questa affermazione è probabilmente molto lontana dalla sensibilità dei matematici, pur contenendo termini come sfera, circonferenza, centro, punti.

Un altro esempio è dato dalle raccolte di soluzioni del problema della costruzione della doppia media proporzionale, trasmesse ai posteri grazie all'opera di Pappo di Alessandria e di Eutocio di Ascalona.

Nel libro III delle *Collezioni matematiche* Pappo presenta in successione le soluzioni del problema della doppia media proporzionale date da Eratostene, da Nicomede e dai seguaci di Erone e fa vedere come trovare la soluzione di problemi (individuati come *classici*) che per secoli sono espressione della cultura e del lavoro di matematici. Così, presenta la soluzione del problema della duplicazione del cubo per mezzo della concoide che Nicomede ottiene nel piano tramite la costruzione della doppia media proporzionale, la soluzione del problema della quadratura del cerchio per mezzo della quadratrice di Dinostrato e la soluzione della trisezione di un angolo per due vie, cioè per mezzo di un problema di inclinazione o di inserzione e per mezzo di un luogo solido.

La raccolta che Eutocio lascia ai posteri è più completa di quella di Pappo. Essa si trova all'interno del commento della prop. II 1 dello scritto *La sfera e il cilindro* di Archimede. In questa proposizione il matematico di Siracusa si propone di risolvere il problema di trovare una sfera equivalente a un cono o a un cilindro dato. Il risultato è da lui ottenuto per mezzo della costruzione della doppia media proporzionale, seguendo lo stile adottato da Ippocrate di Chio, il quale per mezzo di questo problema risolve quello della duplicazione del cubo. Nel suo commento Eutocio mette insieme le soluzioni del problema della doppia media proporzionale ottenute da Platone, Erone, Filone di Bisanzio, Apollonio, Diocle, Pappo, Sporo di Nicea, Menecmo, Archita di Taranto, Eratostene e Nicomede.

Queste raccolte trasmettono ai posteri conoscenze, metodi risolutivi e argomentazioni che diventano oggetto di riflessione per molti matematici posteriori, come si evince dalla storia della trasmissione del commento di Eutocio.

Si può affermare che altrettanto succede per la trasmissione di ogni contenuto matematico elaborato in uno specifico periodo storico?

Non è facile rispondere a questa domanda poiché la risposta dovrebbe essere sostenuta dallo studio del fenomeno della trasmissione in generale e in rapporto a specifici contenuti matematici. Ciò è abbastanza complicato se si tiene conto del fatto che la trasmissione di conoscenze da un secolo all'altro non avviene sempre nello stesso modo.

Nello specifico delle tematiche riguardanti la sfera o la costruzione della doppia media proporzionale si può ipotizzare che esse possano far parte di contenuti non secondari nella trasmissione matematica in vista della loro incidenza nella formazione? In verità ci sembra che una discussione di questo tipo non porti in tempo breve ad alcuna conclusione significativa. Constatiamo anche che la lettura della costruzione della doppia media proporzionale nel linguaggio algebrico non fa compiere ulteriori passi concettuali alle idee che vertono attorno al problema geometrico da cui ha origine.

In questo scritto concentriamo l'attenzione su un lemma introdotto da Archimede all'interno della soluzione con il metodo dell'analisi della prop. II 4 de *La sfera e il cilindro*, nella quale si chiede di tagliare una sfera con un piano in modo da ottenere segmenti sferici tali che il loro rapporto sia uguale a un rapporto dato.

Il lemma, la cui costruzione geometrica è immediata avendo carta e penna a disposizione, è così enunciato:

> Dati due segmenti DB e BF, tali che $DB = 2BF$, e dato un punto G su BF, secare il segmento DB nel punto X in modo che il quadrato di DB stia al quadrato di DX come XF sta a GF, cioè $\frac{DB^2}{DX^2} = \frac{XF}{GF}$.

Questo problema geometrico si risolve scegliendo in modo opportuno il percorso che porta a trovare il punto X che soddisfa la proporzione.

Archimede non dà la soluzione di questo lemma, chiamato in tempi posteriori *retta di Archimede* o anche *problema del quadrato* se si considera un quadrato tale che sul prolungamento di un suo lato, attraverso una costruzione geometrica, si trovino i punti indicati nella proporzione.

Nel corso delle nostre ricerche in storia della matematica sono passati davanti ai nostri occhi scritti di epoche differenti nei quali si leggono riflessioni attorno a questo lemma.

Cerchiamo ora di mettere insieme queste riflessioni, analizzandole e cogliendo il senso di ognuna di esse nel proprio specifico contesto storico. Nel frattempo ci lasciamo suggestionare da queste stesse riflessioni, scegliendo una chiave di lettura più personale e soggettiva che metta in evidenza cosa il loro studio suscita toccando le corde più profonde dell'essere, dove l'immaginazione e la mente sono all'opera spaziando senza alcun limite.

Lo studio della storia di questo problema in tanti momenti suscita in noi suggestioni e domande che rimangono a margine delle riflessioni strettamente scientifiche e possono sembrare fuori luogo in una ricostruzione storica. Nello scritto che ci accingiamo a comporre intendiamo dare spazio a queste suggestioni e domande, compiendo un percorso molto soggettivo, pur nel pieno rispetto dei momenti storici in cui le riflessioni sono avvenute. Vogliamo abbordarle con altre categorie interpretative, come la bellezza e l'estetica, realtà che rientrano pienamente nel contesto dell'esperienza che, tramite lo studio della matematica, si fa sul piano immaginativo e su quello intellettivo.

Pensiamo che la bellezza e l'estetica non siano categorie di cui si parla solo prendendo in considerazione opere artistiche, avendo avvertito tanta bellezza in molte pagine della storia della matematica, sostenuta da un profondo senso estetico che avvolge la considerazione degli oggetti matematici. È ovvio che è molto soggettivo parlare dell'una e dell'altra, non disponendo di elementi oggettivi per farlo, ma siamo convinti che la bellezza si colga attraverso la forma di ognuno di questi oggetti e per mezzo del suo modello concettuale e che l'estetica metta in luce la purezza della forma, consentendo di avere un impatto con l'oggetto che, in tal modo, appare nella sua semplicità costitutiva. A tutto ciò è essenzialmente legato l'aspetto epistemologico della struttura matematica in cui l'oggetto è considerato.

Non facciamo esperienza attraverso i sensi né della bellezza né dell'estetica. Il bello della matematica, più specificamente della geometria, trova consistenza nel mondo delle idee ed è colto attraverso l'attività della mente. L'estetica costituisce la sua esperienza intellettuale.

È questo il parlare di una persona che si occupa di matematica o della sua storia?

Non è la formazione matematica che abilita a parlare in questi termini, altrimenti un cultore di matematica si esprimerebbe in termini di bellezza e di estetica. L'esperienza personale ci fa dire che solo una ininterrotta consuetudine con scritti matematici, che interpellano a più riprese il soggetto, porta a una meditazione nella quale si riflette a lungo e in profondità sugli oggetti, individuandone la costituzione e le proprietà. Questa meditazione, a sua volta, può sfociare in rari momenti di grazia o di contemplazione degli stessi oggetti, dove essi appaiono nella loro semplicità costitutiva.

Si parla di bellezza e di estetica nelle aule dove è impartito un insegnamento di matematica?

Generalmente no, anche se sarebbe allettante che ciò avvenisse, poiché così la matematica verrebbe tolta dalla sua complicata astrattezza, che agli occhi di tanti ascoltatori non dà spessore e senso al discorso matematico, per essere innestata nella vita e nell'orizzonte quotidiano di qualunque alunno, essendo ogni essere umano suggestionato dalla scoperta del bello, qualunque sia l'ambito della sua espressione.

Non si tratta di creare una teoria della bellezza e di enunciare principi estetici, quanto piuttosto di mettersi nella disponibilità interiore di accogliere ciò che bello, considerandolo nella sua integralità estetica, di saperlo apprezzare e di goderne con piena soddisfazione intellettuale.

D'altra parte, a cosa potrebbe servire avere a disposizione una teoria della bellezza e dell'estetica?

Non siamo in grado di comprendere quale senso queste teorie potrebbero avere in rapporto alle elaborazioni matematiche.

Chi è in grado di redigere una teoria della bellezza e della bellezza della matematica? Chi può qualificarsi come esteta della matematica, pur avendo un'ottima preparazione per *fare* matematica, avendone acquisito gli strumenti necessari?

Queste sono domande alle quali è estremamente problematico dare risposte, acquisendo esse senso nel contesto della vita personale più intima. Porre l'accento sulla bellezza e sull'estetica della matematica avviene nel contesto di una scelta molto personale, in cui ci si esprime in termini appena abbozzati che realizzano un dire che con difficoltà può costituire un discorso completo ed esauriente. Nonostante ciò, preferiamo dare spazio a queste realtà, cercando di individuare il modo in cui possano essere considerati i problemi e i discorsi matematici, tracciandone la storia.

Ripercorrendo gli eventi matematici che nel corso dei secoli hanno segnato la riflessione attorno al problema sopra indicato abbiamo la possibilità di renderci conto di quanta bellezza passi per le nostre mani e nella nostra mente.

Questa premessa indica con quale spirito e in quali condizioni interiori ci possiamo avvicinare alla storia della *retta di Archimede* o del *problema del quadrato.*

Nel corso dei secoli il lemma di Archimede è indicato in vari modi: *retta di Archimede*, *problema del parallelogramma*, *problema del rombo* e, in modo definitivo, *problema del quadrato*.

In questa storia i punti estremi di riferimento sono il commento di Eutocio alla prop. II 4 archimedea de *La sfera e il cilindro* e la *Géométrie* di René Descartes (1590-1650) che, nel libro III, presenta semplicemente il *problema del quadrato* espresso per mezzo di una equazione di quarto grado, di cui cerca la soluzione generale.

Il problema è il *lemma* che Archimede (287-212) enuncia come indispensabile per risolvere con il metodo dell'analisi la prop. II 4 de *La sfera e il cilindro*. Nel corso della soluzione Archimede promette di dare *alla fine* la soluzione di questo lemma per mezzo dei metodi di analisi e di sintesi ma non mantiene la promessa poiché non si trova alcuna sua soluzione né a conclusione della proposizione né alla fine del libro II e non esistono manoscritti che la contengono.

Leggiamo un unico cenno ad essa nel commento di Eutocio di Ascalona (480-540) alla proposizione de *La sfera e il cilindro*. In esso l'autore annota di avere trovato traccia di una soluzione ottenuta da Archimede per mezzo di intersezioni tra coniche in un manoscritto *illegibile*, *corrotto* e *di difficile interpretazione*.

Il lemma, chiamato nella tradizione araba la *retta di Archimede*, è un problema, il cui enunciato può essere espresso in questi termini:

> Dati il segmento AB, il punto medio C e il punto D preso a piacere tra A e C, in modo che DC sia anche dato, trovare il punto E, tale che il rapporto tra CE e DC sia uguale al rapporto tra il quadrato di AB e il quadrato di EB.

Il problema si risolve se troviamo la lunghezza di CE.

Siano AB un segmento qualunque e C il suo punto medio.

Fra A e C prendiamo il punto D a una distanza fissata da A o da C.

Dobbiamo trovare il punto E, tra C e B, in modo che sia

$$\frac{CE}{DC} = \frac{AB^2}{EB^2} \qquad (1)$$

Poiché $EB = CB - CE = \frac{AB}{2} - CE$, allora

$$EB^2 = \left(\frac{AB}{2} - CE\right)^2 = \frac{AB^2}{4} + CE^2 - AB \cdot CE$$

Allora, la (1) diventa $\frac{CE}{DC} = \frac{AB^2}{\frac{AB^2}{4}+CE^2-AB\cdot CE}$, da cui segue

$$CE^3 - AB \cdot CE^2 + \frac{AB^2}{4} CE = AB^2 \cdot DC \qquad (2)$$

Se teniamo conto del *linguaggio retorico* con cui fino al Seicento è letta ogni espressione matematica, la (2) può essere letta nel modo seguente.

Nel problema è richiesto di trovare il cubo di lato CE, il parallelepipedo di base il quadrato di lato CE e altezza AB, il parallelepipedo di base un quarto del quadrato di lato AB e altezza CE, il parallelepipedo di base il quadrato di lato AB e altezza DC. Questi solidi devono essere tali da soddisfare la (2).

Questo linguaggio è ormai desueto per tante generazioni di cultori di matematica, essendo abituati a usare il linguaggio algebrico.

In termini algebrici la (2) si traduce in un'equazione di terzo grado nell'incognita CE, da risolvere nel modo consueto, verificando quante soluzioni reali soddisfano il problema.

Questo problema si risolve per mezzo di intersezioni di coniche e non con rette e cerchi. Secondo la classificazione adottata fino al Seicento, il problema è *solido*, non *piano*.

Nel suo commento Eutocio ricostruisce la soluzione del problema con i metodi di analisi e di sintesi tramite l'intersezione di una parabola con un'iperbole.

Cosa ha trovato Eutocio in quel manoscritto *illegibile* scritto in *dialetto dorico* (quello proprio degli scritti di Archimede)?

Possiamo solo supporre che abbia trovato qualche elemento con cui *ricostruire* o *divinare* (secondo il linguaggio del Cinque-Seicento) la soluzione.

Come ha fatto nel commento alla prop. II 1 dello stesso scritto, in cui raccoglie le soluzioni della costruzione della doppia media proporzionale, nel commento alla prop. II 4 Eutocio presenta una propria soluzione del lemma e della proposizione, a cui fa seguire le soluzioni di Dionisodoro e Diocle.

Prima del sec. VI sono composte alcune proposizioni delle *Collezioni matematiche* di Pappo (290-350) nelle quali si ha una traccia del *problema del quadrato*, risolto per mezzo di una νεῦσις (*inclinazione* o *inserzione*) di un segmento tra altri segmenti.

Richiamiamo la prop. IV 31, nella quale si scorgono alcuni elementi presenti nell'enunciato del *problema del quadrato*:

> *Prop. IV 31.* Dato il rettangolo $ABCD$ e prolungato il lato AB [dalla parte di B], [prendere su BC il punto E e] tracciare trasversalmente il segmento DE, che prolungato interseca il prolungamento di AB in F, in modo che EF sia uguale a un segmento dato.

Questo problema, risolto con i metodi di analisi e di sintesi per mezzo dell'intersezione di una circonferenza con un'iperbole, è il lemma scelto nella soluzione del problema della trisezione di un angolo (prop. IV 32).

Inoltre, nel libro VII dello stesso scritto, Pappo, presentando le opere di Apollonio, parla del trattato *Sulle inclinazioni*, di cui non si ha traccia fino agli inizi del Seicento. In questo secolo Marino Ghetaldi (1607 e 1613) e Ugo di Omerique (1698) e, successivamente, Samuel Horsley (1770) ne fanno la *ricostruzione*.

Nello scritto di Pappo le condizioni del *problema del quadrato* sono deducibili dall'enunciato seguente:

> Dato un parallelogramma (o un rombo) e prolungato uno dei suoi lati, inserire in un suo angolo esterno un segmento dato inclinato verso l'angolo a esso opposto.

Nello stesso libro Pappo presenta le propp. VII 70-72, con le quali per passi successivi si avvicina al *problema del quadrato*, come avviene nella prop.VII 72, dove il problema assume la formulazione più conosciuta:

> *Prop. VII 72.* Dato il quadrato $ABCD$ e prolungato il lato AB fino a E, [prendere su BC un punto F] in modo che la retta EF sia *inclinata* verso il punto D, cioè verificare che i punti D, F e E siano su una stessa retta.

Leggendo le proposizioni di Pappo non cogliamo alcun nesso con la formulazione del *lemma* di Archimede, per cui possiamo ritenere che almeno per alcuni cultori di matematica dei sec. III a. C. - III d. C. la *retta* archimedea e il *problema del quadrato* indichino due realtà geometriche separate.

Osserviamo, poi, che la ricostruzione di Marino Ghetaldi (1568-1926) del trattato *Sulle inclinazioni* contiene l'enunciato di un problema, *problema del parallelogramma/rombo,* in cui è possibile leggere il *lemma* di Archimede. Troviamo questo nell'*Apollonius redivivus seu restituta Apollonii Pergaei de inclinationibus geometriae* del 1607 (libro I dello scritto di Apollonio). Non troviamo traccia del problema nell'*Apollonius redivivus seu restitutae Apollonii Pergaei de inclinationibus geometriae liber secundus* (libro II del testo di Apollonio) del 1613.

L'enunciato del problema è il seguente:

> Dato un rombo e prolungato un suo lato, inserire nell'angolo esterno un segmento uguale a un segmento assegnato che, prolungato, passi per l'angolo opposto.

Il problema viene ripreso da Ghetaldi nel *De resolutione & compositione mathematica libri quinque* del 1630 (postumo), dove nel corso della soluzione si afferma che esso è risolubile solo geometricamente, mentre *non è risolubile per mezzo dell'algebra*.

Con questa affermazione veniamo introdotti in una questione, molto viva in quei decenni, che riguarda l'individuazione dei problemi risolubili o non risolubili *per via di algebra*.

Nel 1629 è pubblicato l'*Invention nouvelle en l'algebre* di Albert Girard, in cui il *problema del quadrato* in un caso particolare è letto come *problema di inclinazione*, trovando così la sua prima espressione all'interno dell'algebra e del metodo analitico.

Successivamente René Descartes, nel libro III della *Géométrie* del 1637, presenta il *problema del quadrato* come esempio di equazione di quarto grado, esprimibile come prodotto di due equazioni di secondo grado, di cui trova la soluzione *generale*.

Questi due matematici non fanno alcun riferimento allo scritto archimedeo, ma possiamo ritenere che conoscano la ricostruzione di Ghetaldi e certamente le pagine di Pappo.

In appendice allo scritto *De circuli magnitudine inventa* del 1654 Christian Huygens studia il *problema del quadrato* e il *problema del rombo* a partire dalle pagine di Pappo. In manoscritti del 1652 troviamo anche la loro soluzione algebrica.

Newton, infine, a più riprese fa riferimento al problema del quadrato nei suoi *Mathematical Papers*.

Riferimenti storici evidenziano che il *lemma* di Archimede è tenuto presente e studiato da Dionisodoro (250-190) e da Diocle (240-180) ed è ripreso da Apollonio, che lo riformula come *problema del parallelogramma* o *problema del rombo* e lo inserisce nel trattato *Sulle inclinazioni*, risolvendolo come problema solido (è Pappo che ne dà la lettura di *problema piano* apportando le opportune variazioni nella formulazione).

Nel nostro lavoro individuiamo a grandi linee le tracce dello studio di questo problema che, dopo Archimede, si allargano per tutto il periodo ellenistico, avendo poi risonanza nella tradizione latina. Abbiamo, così, sparsi sviluppi matematici del problema, letti in rapporto al contesto in cui è enunciato il lemma archimedeo.

L'interesse espresso successivamente per lo stesso problema ci fa porre alcune domande che vanno al di là della stretta espressione matematica e che sembrano estranee all'ambiente in cui si forma abitualmente un matematico. Ci fa chiedere, ad esempio, come sia avvenuta la scelta del lemma o in quale modo i matematici posteriori abbiano letto gli scritti di Archimede.

Le tracce del problema del periodo ellenistico suggestionano alcuni matematici arabi dei secc. IX-XIII, che dedicano tempo e attenzione alla *retta di Archimede* e al *problema del quadrato*, costituendo una linea autonoma di ricerca, anche se strettamente ancorata alla costruzione di un eptagono regolare in un cerchio.

Della costruzione di questo poligono non troviamo alcun cenno negli scritti di Archimede né in altri scritti dell'antichità. Vi sono solo due riferimenti nella *Metrica* di Erone (10-75) al rapporto tra il lato dell'esagono regolare e quello dell'eptagono regolare e al calcolo dell'area di quest'ultimo poligono.

Nel *Kitāb al-fihrist* (*Libro dell'indice*) del librario Al-Nadīm, composto attorno al 998, leggiamo che esiste un manoscritto attribuito ad Archimede che tratta della costruzione dell'eptagono. Questa notizia, in verità, circola tra i matematici più attivi all'inizio del sec. IX nella Casa della Saggezza di Bagdad (i fratelli Bānū Mūsā, Thābīt ibn Qurra, …), tanto da indurre Thābīt (836-901) a tradurlo in lingua araba presumibilmente dal greco. Ciò è attestato dal manoscritto ms. 41 della Collezione Riyāda, Dār al-Kutub del Cairo, copiato da Mustafā Sidqī tra il 1733 e il 1740, all'interno del quale si trova la traduzione con il titolo *Libro della costruzione del cerchio diviso in sette parti uguali di Archimede.*

Questa traduzione è da ritenersi pregevole in ragione dell'ottima formazione matematica e della spiccata sensibilità filologica di Thābīt.

È uno scritto composto da 18 proposizioni, in cui sono risolti 13 problemi diversi, tra cui compare il *problema del quadrato* (prop. 17), che è indispensabile per risolvere il problema della costruzione dell'eptagono regolare (prop. 18).

Il *problema del quadrato* è così enunciato:

> *Prop. 17*. Sia dato il quadrato *ABCD*; prolunghiamo il lato *AB* dalla parte di *A* fino al punto *E*; tracciamo la diagonale *BD* e poniamo una riga in modo che abbia un estremo in C e l'altro estremo su *AE*, tale che, intersecando *AE* in *G*, *AD* in *H* e *BD* in *I*, i triangoli *GAH* e *CID* siano uguali; tracciamo, infine, *KIL* parallelo ad *AD*; allora $AB \cdot KB = AG^2$, $GK \cdot AK = KB^2$ e $BK > AK$ e $AG < AK$.

Con una costruzione molto semplice ci rendiamo conto che sulla retta BE sono individuati i punti B, K, A, G, E che dividono il segmento BE in parti tra le quali esiste una relazione simile a quella espressa dal lemma di Archimede.

Essendo la copia manoscritta molto tardiva (1733-1740), non si ha alcuna certezza se nella sua prima stesura il testo contenesse le diciotto proposizioni o se inizialmente fosse composto da due sole proposizioni, contenenti la soluzione del problema dell'eptagono, successivamente ampliate con l'aggiunta delle altre proposizioni.

È spontaneo immaginare che la traduzione di Thābīt passi per le mani di alcuni matematici posteriori, inducendoli a dare alle propp. 17 e 18 un ulteriore sviluppo matematico, certi di contribuire a diffondere il pensiero di Archimede, essendo convinzione indiscussa la sua paternità del problema e del testo. L'attenzione di questi matematici si ferma su alcuni specifici scritti di Al-Qūhī (940-1000), Al-Sijzī (945-1020), Al-Haytham (965-1040) e Ibn Sahl (di cui si hanno scarse notizie) su questo soggetto. Con i trattati di questi autori la *retta di Archimede* e il *problema del quadrato* trovano la propria collocazione epistemologica di lemma necessario per la costruzione dell'eptagono regolare.

A grandi linee tracciamo il percorso storico della *retta di Archimede* e del *problema del quadrato*, nel corso del quale facciamo riferimento ad alcuni matematici di tre periodi storici differenti: il periodo ellenistico, i secc. IX-XIII e il Seicento.

Il nostro scopo è quello di tentare di dare una lettura puntuale, filologicamente corretta e fedele del pensiero di ogni autore citato, cercando di cogliere qualche elemento del suo contesto di vita e di cultura.

Dividiamo il nostro scritto in tre parti: nella prima leggiamo le elaborazioni dei matematici ellenistici circa il lemma di Archimede, nella seconda presentiamo i trattati dei matematici arabi citati e nella terza evidenziamo la trasmissione dei problemi e delle questioni inerenti a essi nella tradizione latina, le espressioni matematiche con cui sono dati e le soluzioni proposte.

All'interno del testo: diamo i riferimenti bibliografici essenziali, senza avere un impatto diretto con tutte le fonti primarie oggi reperibili; riduciamo la riproposizione delle elaborazioni dei diversi matematici all'essenziale; esprimiamo le linee delle soluzioni senza scendere nei dettagli di ognuna di esse; tentiamo di proporre le costruzioni geometriche in modo semplice. Non esibiamo o mostriamo figure e costruzioni, ritenendo che un lettore che abbia ricevuto una formazione di base in matematica sia in grado di effettuarle seguendo le indicazioni che nel testo sono date in forma più esplicita rispetto a quella che troviamo usualmente negli scritti di riferimento.

Lo scopo primario del nostro lavoro è fare scoprire un senso di bellezza nelle trattazioni dei matematici e provare una certa soddisfazione estetica di fronte allo stile e alle scelte che ognuno di loro esprime nel *fare* matematica, anche in tempi lontani da noi, convinti che questo *fare*, specifico per la matematica, possa anche oggi suggestionare, qualunque sia il problema in esame.